

Examen

Exercice 1 (8 points) : Questions courtes

Toute réponse doit être justifiée, soit par un petit calcul soit par des arguments (vous pouvez faire référence aux résultats du cours). Si une réponse vous prend plus que deux lignes, elle est probablement plus compliquée que nécessaire.

1. Pour la représentation du moment cinétique de spin- $\frac{1}{2}$, donnez les matrices qui correspondent aux opérateurs d'échelle $\mathbf{S}_+$ et $\mathbf{S}_-$.
2. Calculez explicitement $\mathbf{S}_-|\uparrow\rangle$ et $\mathbf{S}_-|\downarrow\rangle$. Ici $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ sont des vecteurs propres de $\mathbf{S}_3$ avec valeurs propres $\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$ respectivement.

Pour la suite, on regarde un électron non relativiste en trois dimensions dans le potentiel de l'atome d'hydrogène, $\mathbf{V}(\vec{\mathbf{X}}) = -e^2/|\vec{\mathbf{X}}|$.

3. Calculez le commutateur $[\mathbf{X}_i, \mathbf{L}_j]$.
4. L'électron est dans l'état fondamental. Calculez la moyenne quantique $\langle \vec{\mathbf{P}} \rangle$.
5. L'électron est maintenant dans l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\psi_{3,1,0}\rangle + 2|\psi_{3,2,1}\rangle)$. On mesure $\mathbf{L}_3$; qu'est-ce qu'on peut trouver et avec quelle probabilité?
6. Calculez l'énergie (en eV) qui correspond à l'état $|\psi\rangle$ de 5.

Enfin on regarde un oscillateur harmonique 1-dimensionnel, $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2$.

7. On mesure $\mathbf{X}$ dans l'état fondamental. Quelle est la probabilité de trouver une valeur de mesure négative?
8. Calculez $\langle \mathbf{H} \rangle$ dans l'état cohérent $|\alpha\rangle$.

Exercice 2 (4 points) : Représentations de position et d'impulsion

On regarde une particule de masse m dans une dimension sans potentiel, $\mathbf{V} = 0$. Sa fonction d'onde dans la représentation de position est

$$\psi(x) = \begin{cases} N \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right), & -a < x < a \\ 0, & x > a \text{ ou } x < -a \end{cases}$$

avec $a > 0$ et $N > 0$ des constantes réelles.

1. Calculez N pour que ψ soit bien normalisée.
2. Est-ce que la particule est dans un état stationnaire? Si oui, quelle est son énergie?
3. Calculez la fonction d'onde dans la représentation d'impulsion $\tilde{\psi}(p)$.

Indications : La primitive de $\cos^4(x)$ est $\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + \text{const.}$ La primitive de $\cos^2(cx)\cos(kx)$ est $\frac{\sin(kx)}{2k} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sin((2c-k)x)}{2c-k} + \frac{\sin((2c+k)x)}{2c+k}\right) + \text{const.}$ On a $\sin(\pi \pm \phi) = \mp \sin(\phi)$.

Exercice 3 (5 points) : Oscillateur harmonique 3-dimensionnel

Le hamiltonien d'un oscillateur harmonique isotrope en trois dimensions est

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{P}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{\mathbf{X}}^2.$$

On dénomme par $\psi_n(x)$ les fonctions d'onde normalisées des états stationnaires de l'oscillateur 1-dimensionnel avec fréquence angulaire ω et masse m .

1. On définit $\Psi_{n_1 n_2 n_3}(\vec{x}) \equiv \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)\psi_{n_3}(x_3)$. Montrez que $\Psi_{n_1 n_2 n_3}(\vec{x})$ est la fonction d'onde d'un état stationnaire de $\mathbf{H}$. Donnez son énergie $E_{n_1 n_2 n_3}$ en fonction des nombres quantiques n_i et de $\hbar\omega$. (Vous pouvez utiliser les résultats du cours sur l'oscillateur 1-dimensionnel, voir formulaire ci-dessous.)
2. On affirme qu'il existe une autre base d'états stationnaires qui, quant à eux, sont en outre des états propres des opérateurs $\vec{\mathbf{L}}^2$ et $\mathbf{L}_3$. Justifiez cette affirmation.
3. On dénomme les fonctions d'onde correspondantes par $\Phi_{klm_l}(r, \theta, \phi)$:

$$\vec{\mathbf{L}}^2 \Phi_{klm_l} = \hbar^2 l(l+1) \Phi_{klm_l}, \quad \mathbf{L}_3 \Phi_{klm_l} = \hbar m_l \Phi_{klm_l}, \quad \mathbf{H} \Phi_{klm_l} = E_{kl} \Phi_{klm_l}.$$

Pour l'état fondamental, qu'est-ce que l et m_l ? Donnez les expressions explicites de la fonction d'onde de l'état fondamental en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques.

4. Avec $\Phi_{klm_l}(r, \theta, \phi) = \frac{u_{kl}(r)}{r} Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$, trouvez une équation différentielle vérifiée par la fonction radiale réduite $u_{kl}(r)$. (Il n'est pas demandé de la résoudre.)

Exercice 4 (3 points) : Théorie des perturbations

Pour un électron dans $d = 3$ dimensions, on regarde la modification suivante du potentiel de Coulomb (le *potentiel de Yukawa*) :

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{e^2}{r} \exp(-Mr).$$

Ici $M > 0$ est un paramètre de dimension longueur⁻¹ vérifiant $M \ll 1/a_0$. Calculez le spectre d'énergies. On admettra que la structure fine et tous les termes d'ordre $\geq M^3$ soient négligeables.

Indication : $\langle r \rangle = \frac{a_0}{2} (3n^2 - l(l+1))$ dans un état stationnaire de l'atome d'hydrogène.

Formulaire : Matrices de Pauli $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Moment cinétique : $[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{J}_k$, valeurs propres de $\vec{\mathbf{J}}^2$: $\hbar^2 j(j+1)$ ($2j \in \mathbb{N}$), valeurs propres de $\mathbf{J}_3$: $\hbar m$ ($-j \leq m \leq j$), opérateurs d'échelle $\mathbf{J}_{\pm} = \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2$ avec $\mathbf{J}_{\pm}|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j(m \pm 1)\rangle$.

Fonction d'onde de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène $\psi_{100}(r, \theta, \phi) = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r/a_0}$ avec $a_0 = \hbar^2/(m_e e^2)$. Spectre d'énergies $E_n = -\frac{e^4 m_e}{2\hbar^2 n^2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $E_1 = -13.6$ eV.

Oscillateur harmonique 1-dimensionnel : $\mathbf{H} = \hbar\omega(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2})$ avec $\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\mathbf{X} + \frac{i}{m\omega}\mathbf{P})$, $\mathbf{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ et $\mathbf{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$. Énergies $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. État fondamental $\langle x|0\rangle = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} \exp(-m\omega x^2/2\hbar)$. États cohérents $\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{C}$).

Transformée de Fourier : $\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ipx/\hbar}$ et son inverse $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \tilde{f}(p) e^{ipx/\hbar}$.

Laplacien en coordonnées sphériques : $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \vec{\mathbf{L}}^2$

Théorie des perturbations : pour $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{W}$ et avec $\langle \mathbf{W} \rangle_{mn} = \langle \psi_m^{(0)} | \mathbf{W} | \psi_n^{(0)} \rangle$, on a $E_n = E_n^{(0)} + \lambda \langle \mathbf{W} \rangle_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} |\langle \mathbf{W} \rangle_{kn}|^2 / (E_n^{(0)} - E_k^{(0)}) + \mathcal{O}(\lambda^3)$.