Examen – Session 2

Exercice 1 (8 points) : Questions courtes

Toute réponse doit être justifiée, soit par un petit calcul soit par des arguments (vous pouvez faire référence aux résultats du cours). Si une réponse vous prend plus que deux lignes, elle est probablement plus compliquée que nécessaire.

On considère un oscillateur harmonique 1-dimensionnel de fréquence angulaire ω et masse m. Comme d'habitude on désigne par $|n\rangle$ le n-ème état excité normalisé et par $|\alpha\rangle$ un état cohérent normalisé vérifiant $\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

1. Calculez l'élément de matrice $\langle n|\mathbf{P}|n+1\rangle$.
2. Calculez le produit scalaire $\langle n|\alpha\rangle$.
3. Calculez $\langle \mathbf{H}\rangle$ dans l'état $|\alpha\rangle$.

On regarde maintenant un système à deux états et l'observable $\mathbf{A} = \mathbf{1} + \sigma^1$ (on rappelle que $\sigma^{1,2,3}$ sont les matrices de Pauli).

4. Quelles sont les possibles valeurs de mesure quand on mesure $\mathbf{A}$?
5. Donnez une base d'états propres de $\mathbf{A}$.
6. Dans l'état $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quelle est la probabilité d'obtenir la valeur de mesure 0 ?

Finalement on regarde un atome d'hydrogène, sans prendre en compte la structure fine. L'électron est dans un état stationnaire avec une fonction d'onde de la forme $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\,\sin^4(\theta)\,e^{4i\phi}$.

7. On mesure $\mathbf{L}_3$; qu'est-ce qu'on trouve ?
8. On applique un champ électrique externe homogène $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\vec{e_3}$. Calculez le décalage d'énergie au premier ordre en théorie des perturbations (effet Stark linéaire).

Exercice 2 (4 points) : Équation de Schrödinger

Une particule de masse m se déplace dans une dimension. Sa fonction d'onde est

$$\psi(x) = N\,\cosh^{-\lambda}(ax)\,,$$

où N, λ et a sont des paramètres réels et positifs.

1. Montrez que la fonction d'onde est normalisable. (Il n'est pas demandé de calculer la constante de normalisation N.)
2. Montrez que la particule est dans un état stationnaire du hamiltonien $\mathbf{H} = \mathbf{P}^2/(2m) + \mathbf{V}(\mathbf{X})$ avec le *potentiel de Pöschl-Teller*

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \frac{\lambda(\lambda+1)\hbar^2 a^2}{2m}\tanh^2(a\mathbf{X})\ .$$

   Quelle est son énergie ?

3. Donnez la moyenne quantique $\langle \mathbf{P} \rangle$ dans cet état. (Il convient de trouver la réponse par réflexion, au lieu de se lancer dans un calcul compliqué.)

Rappel :

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) , \quad \cosh'(x) = \sinh(x) , \quad \sinh'(x) = \cosh(x) , \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} .$$

Exercice 3 (4 points) : Moment cinétique

Soient $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ et $\mathbf{J}_3$ trois opérateurs vérifiant les relations de commutation du moment cinétique,

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \mathbf{J}_k .$$

1. Calculez explicitement $\left[\mathbf{J}_3, \vec{\mathbf{J}}^2\right]$, où $\vec{\mathbf{J}}^2 \equiv \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + \mathbf{J}_3^2$.
2. On définit $\mathbf{J}_- \equiv \mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2$. Soit $|\phi\rangle$ état propre de $\vec{\mathbf{J}}^2$ avec valeur propre $\hbar^2\, j(j+1)$ et de $\mathbf{J}_3$ avec valeur propre $\hbar m$. Montrez explicitement : $\mathbf{J}_-|\phi\rangle$ est soit zéro, soit état propre de $\mathbf{J}_3$ avec valeur propre $\hbar(m-1)$.
3. Le hamiltonien d'un *rotateur rigide* est donné par l'expression

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{J}_1^2}{I_1} + \frac{\mathbf{J}_2^2}{I_2} + \frac{\mathbf{J}_3^2}{I_3}\right)$$

   où $I_{1,2,3}$ sont des constantes réelles positives.

   Montrez : Si $I_1 = I_2$, alors $\mathbf{H}$ peut s'écrire uniquement en fonction de $\vec{\mathbf{J}}^2$, de $\mathbf{J}_3$ et des I_i. On supposera que $I_3 < I_1$ et que $I_1 = I_2$. Donnez les possibles énergies en fonction des I_i et des nombres quantiques j et m.

Exercice 4 (4 points) : Atome d'hydrogène

Soit un atome d'hydrogène dans son état fondamental.

1. Calculez la moyenne quantique

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{\mathbf{X}}|^2} \right\rangle .$$

2. On mesure la distance d entre le noyau et l'électron. Quelle est la probabilité de trouver $d \leq a_0$?

   Indication : La primitive de $f(r) = r^2\, e^{-cr}$ est $-\left(\frac{2}{c^3} + \frac{2r}{c^2} + \frac{r^2}{c}\right) e^{-cr} + \text{cste}$.