Examen

Exercice 1 (8 points) : Questions courtes

Toute réponse doit être justifiée, soit par un petit calcul soit par des arguments (vous pouvez faire référence aux résultats du cours). Si une réponse vous prend plus que deux lignes, elle est probablement plus compliquée que nécessaire.

On considère d'abord une particule de masse m qui se déplace librement (potentiel $\mathbf{V} = 0$) dans une dimension. L'espace de Hilbert est $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.

1. Donnez le hamiltonien $\mathbf{H}$ dans la représentation de position (sans justification).
2. Les opérateurs $\mathbf{HX}$ et $\mathbf{HP}$ sont-ils hermitiens ?
3. Donnez les fonctions d'onde $\langle x|\psi_E\rangle$, sans normalisation, des états propres (généralisés) qui sont solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, $\mathbf{H}|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle$.
4. On mesure l'observable $\mathbf{P}$ dans un tel état $|\psi_E\rangle$, avec $E > 0$. Quelle est la probabilité d'obtenir une valeur de mesure dans l'intervalle $[-\sqrt{mE}, \sqrt{mE}]$?

On regarde maintenant un oscillateur harmonique 3-dimensionnel isotrope. L'espace de Hilbert est $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ et le Hamiltonien est $\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{P}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{\mathbf{X}}^2$.

5. Donnez l'énergie de l'état fondamental et sa fonction d'onde. La normalisation n'est pas demandée.
6. Quel est le degré de dégénérescence du premier état excité ?

Enfin on regarde un atome d'hydrogène (sans prendre en compte la structure fine).

7. Trouvez un exemple d'un état stationnaire, autre que l'état fondamental, qui est aussi état propre de l'opérateur $\mathbf{L}_+$. Donnez la valeur propre correspondante.
8. Calculez $\langle \mathbf{L}_3 \rangle$ dans l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{2,1,0}\rangle + |\psi_{2,1,1}\rangle\right)$

Exercice 2 (5 points) : Système à trois états

On regarde un système à trois états avec l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ et le hamiltonien

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & 0 \\ E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}, \qquad E_{1,2} \in \mathbb{R}, \qquad E_2 > E_1 > 0 .$$

1. Donnez les énergies propres de ce système. Quelle est l'énergie de l'état fondamental ?
2. Le vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ est défini par

$$|\psi\rangle = N \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \quad (\text{pas tous } 0) .$$

   Trouvez la constante réelle positive N telle que $||\psi|| = 1$. Donnez les probabilités de trouver (a) $E = 0$, (b) $E = E_2$ si on mesure l'énergie E dans l'état $|\psi\rangle$, en fonction de α, β et γ.

3. L'observable $\mathbf{L}_3$ est définie par

$$\mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

   Est-ce que $\mathbf{H}$ et $\mathbf{L}_3$ sont simultanément diagonalisables ? Si oui, donnez une base de vecteurs propres communs à $\mathbf{H}$ et $\mathbf{L}_3$.

4. On ajoute à $\mathbf{H}$ un terme $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $0 < \epsilon \ll E_1$. Calculez le décalage d'énergie de l'état fondamental au premier ordre en théorie des perturbations.

Exercice 3 (4 points) : Moment cinétique orbital

On considère une particule dans un potentiel central en trois dimensions.

1. La particule est dans un état propre des opérateurs $\vec{\mathbf{L}}^2$ et $\mathbf{L}_3$ avec valeurs propres respectives $\hbar^2\, l(l+1)$ et $\hbar m$. Calculez l'écart-type $\Delta\mathbf{L}_1$ en fonction de l et m.
   Indication : Il convient d'écrire $\mathbf{L}_1$ en fonction des opérateurs d'échelle.
2. La particule est maintenant dans un état avec une fonction d'onde de la forme

$$\psi(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + 3x_3)\ f(|\vec{x}|)$$

   avec f une fonction non spécifiée. S'agit-il d'un état propre de $\vec{\mathbf{L}}^2$? Si oui, quel est le l correspondant ? Sinon, quelles valeurs de l peut-on trouver si on mesure $\vec{\mathbf{L}}^2$?

   Rappels : Les premières harmoniques sphériques sont, selon ex. 14,

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\,, \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{-i\phi}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta\,,$$
$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\phi}\,, \quad Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)\,.$$

   La transformation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques est donnée par

$$x_1 = r\sin\theta\cos\phi\,, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\phi\,, \quad x_3 = r\cos\theta\,.$$

Exercice 4 (3 points) : Atome d'hydrogène

Pour un atome d'hydrogène dans son état fondamental, calculez la moyenne quantique de l'énergie cinétique $\langle\mathbf{T}\rangle$. Avec ce résultat, confirmez la prédiction du théorème du viriel :

$$\langle\mathbf{T}\rangle = -\langle\mathbf{H}\rangle\,.$$

Rappels :

$$\vec{\nabla}^2 f(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\,, \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r^n e^{-\alpha r} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}\,.$$