Examen

Exercice 1 (8 points) : Questions courtes

Toute réponse doit être justifiée, soit par un petit calcul soit par des arguments (vous pouvez faire référence aux résultats du cours). Si une réponse vous prend plus que deux lignes, elle est probablement plus compliquée que nécessaire.

On considère d'abord un système quantique à deux états avec l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Le hamiltonien est $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ avec E_i des constantes réelles, $E_2 > E_1$.

1. Donnez un vecteur normalisé qui représente l'état fondamental de ce système.
2. Le système est dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ à l'instant $t = 0$. On mesure son énergie à $t = T$. Calculez la probabilité de trouver la valeur de mesure E_1.
3. Les opérateurs $\mathbf{H}$ et $\mathbf{S}_1$ sont-ils simultanément diagonalisables ? Donnez une base orthonormale de vecteurs propres communs le cas échéant.

Ensuite on regarde un oscillateur harmonique de fréquence angulaire ω dans une dimension. Comme d'habitude on appelle $|n\rangle$ son n-ième état stationnaire.

4. Calculez la moyenne de l'énergie $\langle \mathbf{H} \rangle$ dans l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$.
5. L'opérateur d'échelle $\mathbf{a}^\dagger$ est-il hermitien ?

Finalement, on regarde un atome d'hydrogène (sans prendre en compte la structure fine) dans l'état $|\psi_{3,2,-1}\rangle$.

6. Donnez l'énergie qui correspond à cet état.
7. Quelle est la probabilité d'obtenir la valeur $-\hbar$ quand on mesure l'observable $\mathbf{L}_3$?
8. Décomposez $\mathbf{L}_+|\psi_{3,2,-1}\rangle$ par rapport à la base des $|\psi_{n,l,m_l}\rangle$, où comme d'habitude $\mathbf{L}_+ = \mathbf{L}_1 + i\mathbf{L}_2$.

Exercice 2 (4 points) : Théorie des perturbations et oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique isotrope dans deux dimensions. Le hamiltonien est

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\mathbf{X}_1^2 + \mathbf{X}_2^2\right) .$$

1. Écrivez $\mathbf{H}_0$ en fonction des opérateurs d'échelle $\mathbf{a}_k = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\mathbf{X}_k + \frac{i}{m\omega}\mathbf{P}_k\right)$ et $\mathbf{a}_k^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\mathbf{X}_k - \frac{i}{m\omega}\mathbf{P}_k\right)$ $(k = 1, 2)$.
2. On désigne par $|0\ 0\rangle$ l'état fondamental. Montrez que les états $|1\ 0\rangle = \mathbf{a}_1^\dagger|0\ 0\rangle$ et $|0\ 1\rangle = \mathbf{a}_2^\dagger|0\ 0\rangle$ sont dégénérés et donnez leur énergie.

On regarde maintenant le système perturbé

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \lambda\mathbf{L}\,, \qquad \text{avec } \mathbf{L} = i\hbar(\mathbf{a}_2^\dagger\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1^\dagger\mathbf{a}_2)\,.$$

3. Donnez le décalage d'énergie de l'état fondamental au premier ordre en théorie des perturbations.

4. Calculez les éléments de matrice $\langle 0\ 1|\mathbf{L}|0\ 1\rangle$, $\langle 0\ 1|\mathbf{L}|1\ 0\rangle$, $\langle 1\ 0|\mathbf{L}|0\ 1\rangle$ et $\langle 1\ 0|\mathbf{L}|1\ 0\rangle$. Avec ces résultats, déterminez le décalage d'énergie des premiers états excités au premier ordre.

Exercice 3 (4 points) : Moments cinétiques

On donne les trois matrices

$$\hat{\mathbf{J}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{\mathbf{J}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{\mathbf{J}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Montrez que $[\hat{\mathbf{J}}_1, \hat{\mathbf{J}}_2] = i\epsilon_{123}\hat{\mathbf{J}}_3$.

De la même façon on peut montrer (pas demandé ici) que $[\hat{\mathbf{J}}_2, \hat{\mathbf{J}}_3] = i\epsilon_{231}\hat{\mathbf{J}}_1$ et que $[\hat{\mathbf{J}}_1, \hat{\mathbf{J}}_3] = i\epsilon_{132}\hat{\mathbf{J}}_2$. Les matrices $\hat{\mathbf{J}}_k$ forment alors une représentation du moment cinétique.

2. Calculez $\hat{\vec{\mathbf{J}}}^2$. La représentation est-elle irréductible ? Si oui, à quel spin corresponde-t-elle ?
3. Donnez une base de vecteurs propres communs de $\hat{\mathbf{J}}_3$ et de $\hat{\vec{\mathbf{J}}}^2$.

Exercice 4 (4 points) : Atome d'hydrogène

1. Pour l'état fondamental de l'atome d'hydrogène, calculez $\left|\langle\vec{\mathbf{P}}\rangle\right|$. Puis, donnez la vitesse moyenne de l'électron et justifiez pourquoi a pu le traiter comme particule non relativiste en première approximation.
2. Soit $\psi(\vec{x})$ une fonction d'onde générale d'un électron de masse m_e en trois dimensions. On définit le *courant de probabilité* par

$$\vec{J}(\vec{x}) = \frac{\hbar}{m_e}\,\mathrm{Im}\left(\psi^*(\vec{x})\vec{\nabla}\psi(\vec{x})\right) .$$

Montrez que, si on écrit ψ en représentation polaire comme $\psi(\vec{x}) = R(\vec{x})e^{i\Phi(\vec{x})}$ avec $R \in \mathbb{R}_+$ et $\Phi \in [0, 2\pi)$, alors

$$\vec{J}(\vec{x}) = \frac{\hbar}{m_e}R(\vec{x})^2\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}).$$

3. Utilisez ce résultat pour calculer $\vec{J}$ dans l'atome d'hydrogène avec $\psi(\vec{x}) = \psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$. Exprimez votre résultat en fonction de la densité de probabilité $|\psi_{nlm}|^2$, des coordonnées r et θ et du nombre quantique m.

Rappels :

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} , \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$