Examen

Exercice 1 (8 points) : Questions courtes

Toute réponse doit être justifiée, soit par un petit calcul soit par des arguments (vous pouvez faire référence aux résultats du cours). Si une réponse vous prend plus que deux lignes, elle est probablement plus compliquée que nécessaire.

On considère d'abord un système quantique à deux états avec l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.

1. Pour le système dans l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donnez la moyenne quantique de l'observable $\mathbf{S}_3$.
2. Dans le même état, quelle est la probabilité de trouver la valeur 0 lors d'une mesure de $\mathbf{S}_3$?
3. L'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-il hermitien ? Quelle est sa désignation habituelle et sa signifiance dans la théorie du moment cinétique ?

On regarde maintenant un système quantique avec l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$.

4. L'opérateur $\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{P}}$ est-il hermitien ?
5. On donne la fonction d'onde $\psi(\vec{x}) = A \exp\left(-B\,|\vec{x}|\right)$ avec A et B des constantes réelles positives. Trouvez A en fonction de B tel que $\psi(\vec{x})$ est normalisée.
   Indication : $\int r^2\, e^{-cr}\, \mathrm{d}r = -\left(\frac{2}{c^3} + \frac{2r}{c^2} + \frac{r^2}{c}\right) e^{-cr} + \text{cte}$.
6. Indiquez un système physique qui possède un état stationnaire avec une fonction d'onde de cette forme. Qu'est-ce qui est B dans ce système ?

Finalement on regarde un oscillateur harmonique dans une dimension. Comme d'habitude on appelle $|n\rangle$ son n-ième état excité.

7. Donnez la moyenne quantique de l'opérateur $\mathbf{P}^{27}$ ($\mathbf{P}$ puissance 27) dans l'état $|n\rangle$.
8. On ajoute au hamiltonien de l'oscillateur harmonique un term constant E_0, alors le potentiel devient $\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2 + E_0\,\mathbf{1}$. Montrez que $|n\rangle$ est état stationnaire de ce hamiltonien et donnez son énergie.

Exercice 2 (4 points) : Représentation d'impulsion

On considère un oscillateur harmonique dans une dimension. Le hamiltonien est

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2 \,.$$

1. Donnez les expressions du hamiltonien et des opérateurs d'échelle $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}^\dagger$ dans la représentation d'impulsion.
2. Pour l'état fondamental $|0\rangle$ et le premier état excité $|1\rangle$, calculez les fonctions d'onde dans l'espace des impulsions (la normalisation correcte n'est pas demandée),

$$\langle p|0\rangle = \widetilde{\psi}_0(p)\,, \qquad \langle p|1\rangle = \widetilde{\psi}_1(p)\,.$$

   Indication : On peut simplifier le calcul et éviter les transformations de Fourier si on se sert du résultat de la partie 1. et des propriétés connues de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}^\dagger$.

Exercice 3 (4 points) : Moments cinétiques

On regarde deux particules de spin-$\frac{1}{2}$ avec les opérateurs de moment cinétique $\vec{\mathbf{S}}$ et $\vec{\mathbf{S}}'$ respectivement. Soient $\{|\chi_m\rangle\}$ ($m = \pm\frac{1}{2}$) les vecteurs propres normalisés de $\vec{\mathbf{S}}^2$ et de $\mathbf{S}_3$ avec valeurs propres respectives $\frac{3}{4}\hbar^2$ et $\hbar m$. Soient $\{|\xi_{m'}\rangle\}$ ($m' = \pm\frac{1}{2}$) les vecteurs propres normalisés de $\vec{\mathbf{S}}'^2$ et de $\mathbf{S}'_3$ avec valeurs propres respectives $\frac{3}{4}\hbar^2$ et $\hbar m'$.

Le but de cet exercice est de trouver les coefficients de Clebsch-Gordan $C^{j\,m_j}_{m\,m'}$ dans la décomposition

$$|\psi_{j\,m_j}\rangle = \sum_{m\,m'} C^{j\,m_j}_{m\,m'}\, |\chi_m\rangle \otimes |\xi_{m'}\rangle\,.$$

Ici $|\psi_{j\,m_j}\rangle$ est vecteur propre normalisé de $\vec{\mathbf{J}}^2$ et de $\mathbf{J}_3$ avec valeurs propres $\hbar^2 j(j+1)$ et $\hbar m_j$, $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{S}} + \vec{\mathbf{S}}'$ étant l'opérateur du moment cinétique total.

1. Montrez qu'on peut poser $|\psi_{1\,1}\rangle = |\chi_{\frac{1}{2}}\rangle \otimes |\xi_{\frac{1}{2}}\rangle$. C'est-à-dire, vérifiez que $|\chi_{\frac{1}{2}}\rangle \otimes |\xi_{\frac{1}{2}}\rangle$ est vecteur propre normalisé de $\vec{\mathbf{J}}^2$ et de $\mathbf{J}_3$ avec les valeurs propres correspondantes aux nombres quantiques $j = 1$, $m_j = 1$.

   Indication : Dans l'expression de $\vec{\mathbf{J}}^2$, il convient d'exprimer $\sum_{i=1}^3 \mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}'_i$ en fonction de $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}'_3$ et des opérateurs d'échelle $\mathbf{S}_\pm$ et $\mathbf{S}'_\pm$.
2. Construisez les deux autres vecteurs propres normalisés de $j = 1$ en appliquant l'opérateur d'échelle adimensionné $\hat{\mathbf{J}}_- \equiv \mathbf{J}_-/\hbar$ à $|\psi_{1\,1}\rangle$ plusieurs fois.

   Rappel : On a $\hat{\mathbf{J}}_- = \hat{\mathbf{S}}_- + \hat{\mathbf{S}}'_-$ et $\hat{\mathbf{S}}_-|\chi_m\rangle = \sqrt{\frac{3}{4} - m(m-1)}|\chi_{m-1}\rangle$.
3. Trouvez un vecteur normalisé $\alpha\,|\chi_{\frac{1}{2}}\rangle \otimes |\xi_{-\frac{1}{2}}\rangle + \beta\,|\chi_{-\frac{1}{2}}\rangle \otimes |\xi_{\frac{1}{2}}\rangle$ qui est orthogonal à $|\psi_{1\,0}\rangle$. Montrez qu'on peut poser $|\psi_{0\,0}\rangle$ = ce vecteur.

Exercice 4 (4 points) : Atome d'hydrogène

Dans l'atome d'hydrogène, sans prendre en compte la structure fine, on considère l'état $n = 2$, $l = 1$, $m_l = -1$. Pour rappel, la fonction d'onde est

$$\psi_{2,1,-1}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} a_0^{-5/2}\, r\, e^{-r/(2a_0)} \sin\theta\, e^{-i\phi}\,.$$

1. Donnez les valeurs propres de $\mathbf{H}$, $\vec{\mathbf{L}}^2$ et $\mathbf{L}_3$ pour cet état (sans justification).
2. Calculez la distance moyenne $\bar{r}$ entre l'électron et le noyau.
3. *Effet Paschen-Back* : On place l'atome dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\,\vec{e}_3$ (en supposant que le couplage spin-orbite reste négligeable). Le hamiltonien est

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{Be}{2m_e c}\left(\mathbf{L}_3 + 2\,\mathbf{S}_3\right)\,.$$

   avec $\mathbf{H}_0 = \frac{\vec{\mathbf{P}}^2}{2m_e} + \mathbf{V}_{\text{Coulomb}}$. Calculez le décalage d'énergies au premier ordre en théorie des perturbations pour un électron de (a) $m_s = +\frac{1}{2}$ et de (b) $m_s = -\frac{1}{2}$.