



# Cours hyperfréquences

IUT Montpellier GEII

2<sup>ème</sup> année

# Historique

- Fin 19ème siècle, des générateurs à étincelles utilisés par Hertz et Marconi (1888 à 1890), émettaient des hyperfréquences.
- L'invention du magnétron (générateur HF) date de 1920.
- Première communication avec hyperfréquences 1920-1930.
- Invention du radar (Radio Detection And Ranging) 1940.
- Diode gunn 1962.
- Premier satellite télécommunication 1962.

# Applications

- Radar,
- Télécommunications
- Radioastronomie,
- Radiolocalisation,
- Chauffage,
- Téléphonie, badge

Dans un radar, les hyperfréquences émises

par un émetteur sont réfléchies par les objets.

La con-  
perme-  
l'obsta-

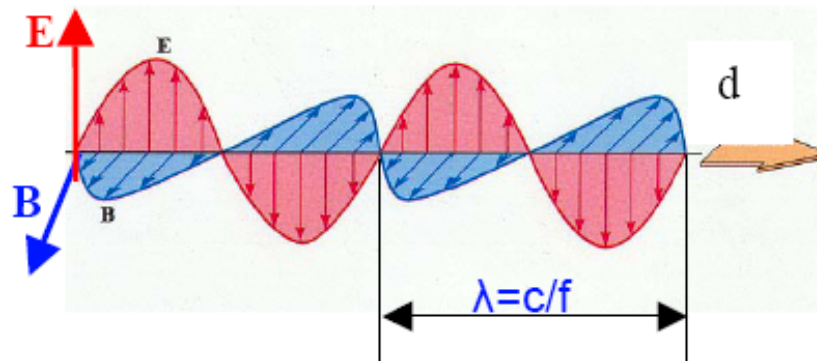
En télécommunications, les hyperfréquences  
servent de support au transport de l'information

E  
D

Les hyperfréquences ont la propriété de créer des vibrations moléculaires induisant un chauffage en profondeur. On les utilise alors pour la cuisson des aliments, pour le séchage, pour le traitement de certaines maladies.

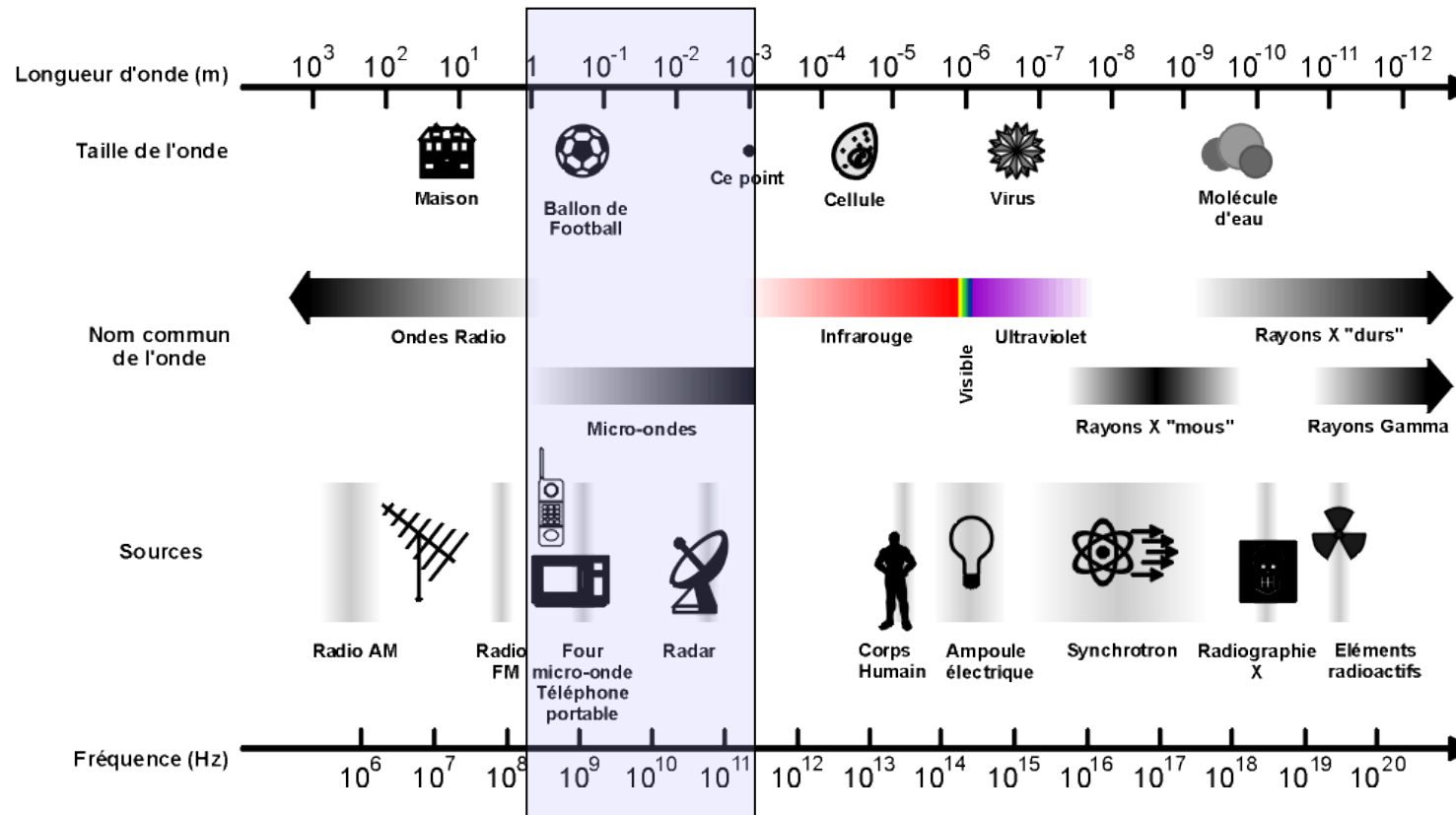
# Introduction

- Les hyperfréquences ou micro-ondes correspondent à des ondes électromagnétiques de fréquences comprises entre 300 MHz et 300 GHz.
- Ces ondes électromagnétiques (OEM) sont associées à des oscillations d'un champ électrique et d'un champ magnétique.

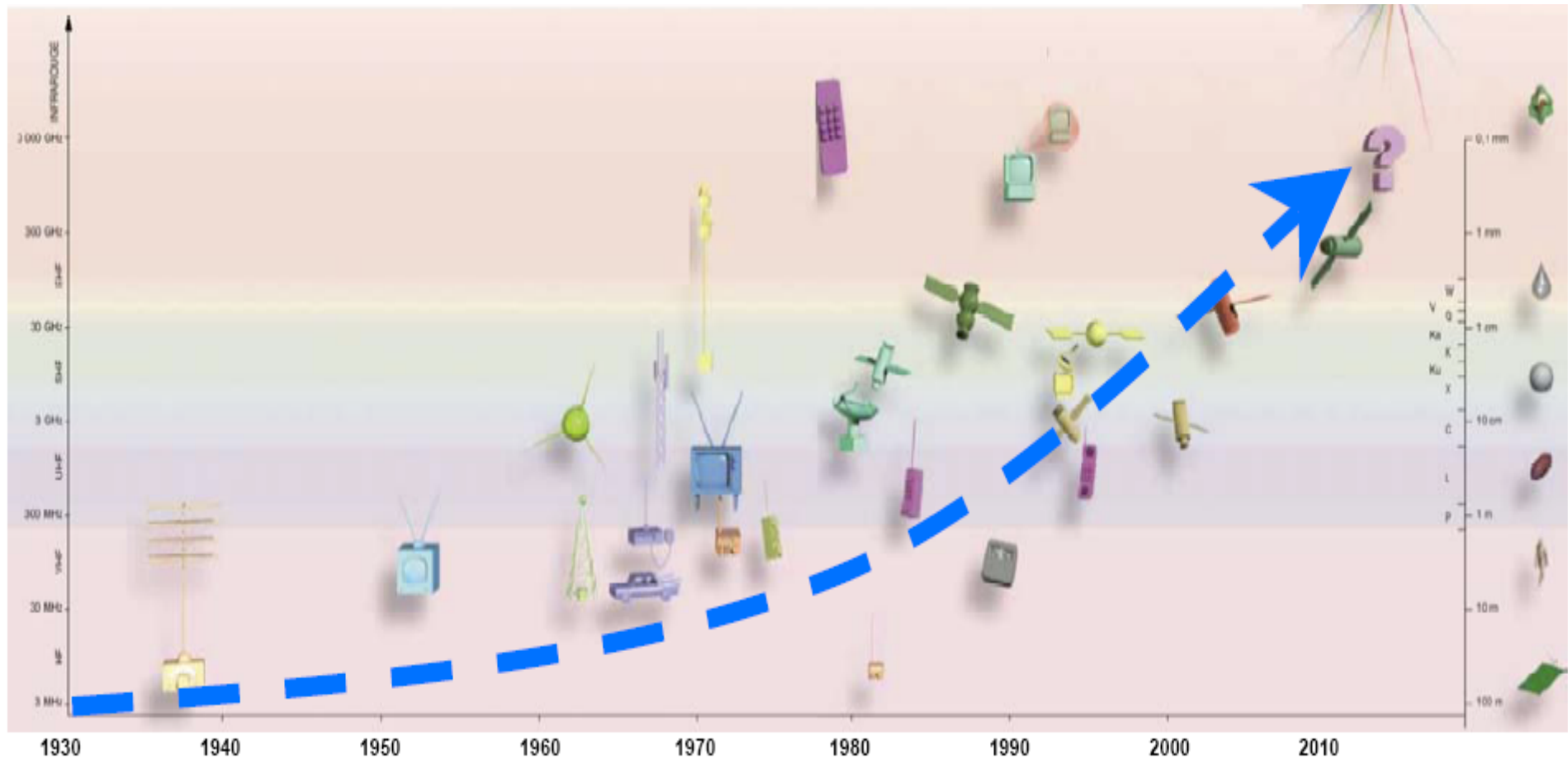


- Le porteur de l'information d'une OEM est le photon.

# Correspondances



# Evolution fréquences-années



# Remarques

## ■ Transport des OEM

- Lignes bifilaires
- Lignes coaxiales
- Lignes à bandes et fentes
- Guides d'onde

## ■ Influences des dimensions

- La longueur d'onde du signal hyperfréquence est du même ordre de grandeur que les éléments employés pour le produire et le transmettre.
- A 50 Hz,  $\lambda$  est de l'ordre de 6000 km mais à 1 GHz, elle n'est plus que de 0,3 m. A un instant donné la phase n'est pas la même en différents endroits d'un circuit centimétrique

# Rappels

## ■ Quelques équations ...

### ■ Fonctions sinusoïdales

$$V(t) = V_0 \cos(\omega * t + \phi) \left\{ \begin{array}{l} \omega = 2\pi.f, \text{ pulsation} \\ f = \frac{1}{T}, \text{ fréquence} \\ \phi, \text{ phase} \end{array} \right.$$

### ■ Ondes électromagnétiques, photons

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu * \epsilon}}, \text{ vitesse de l'onde dans un matériau}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 * \epsilon_0}}, \text{ vitesse de l'onde dans le vide}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu, \text{ perméabilité du milieu de propagation} \\ \epsilon, \text{ permittivité du milieu de propagation} \\ \mu_0, \text{ perméabilité du vide} \\ \epsilon_0, \text{ permittivité du vide} \\ \epsilon_r, \text{ permittivité relative } (\epsilon = \epsilon_0 * \epsilon_r) \end{array} \right.$$



# Rappels

## ■ Quelques équations ...

### ■ Ondes électromagnétiques, photons

#### □ Energie du photon

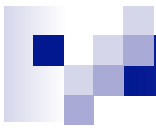
$$E = h * F \quad \begin{cases} h = \text{constante de Planck} \\ F = \text{fréquence de l'OEM} \end{cases}$$

#### □ Longueur d'onde d'une OEM

$$\lambda = v * T$$

## ■ Quelques constantes ...

$$\begin{cases} \epsilon_0 = [36\pi \cdot 10^9]^{-1} \text{ F/m}, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \end{cases}$$



# Rappels

## ■ Relations trigonométriques

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) * \cos(b) - \sin(a) * \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) * \cos(b) + \cos(a) * \sin(b)$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) * \cos(a)$$

## ■ Relation hyperboliques

$$\text{on suppose } \gamma = \alpha + j\beta, \left\{ \begin{array}{l} \cosh(\gamma) = \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} \\ \sinh(\gamma) = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2} \\ \tanh(\gamma) = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{e^\gamma + e^{-\gamma}} \end{array} \right.$$

# Rappels

## ■ Nombres complexes

$$\tilde{Z} = R + jX = |\tilde{Z}|e^{j\varphi} \quad |\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

## ■ Dérivées partielles

- Si la fonction  $f$  dépend de trois variables  $f(x,y,z)$ , la différentielle s'écrit :

$$df = f'_x(x,y,z).dx + f'_y(x,y,z).dy + f'_z(x,y,z).dz$$

$$\text{avec } f'_x(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \dots$$



# Exemples

## ■ Nombres complexes

Pour des signaux variant dans le temps de façon sinusoïdale, on pose :

$$v(t) = V_0 \cos(\omega * t + \varphi)$$

on lui associe une grandeur complexe

$$\tilde{v}(t) = V_0 e^{j(\omega * t + \varphi)} = V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \tilde{V} e^{j\omega t} \text{ avec } \tilde{V} = V_0 e^{j\varphi} \text{ une amplitude complexe}$$

On a alors

$$\text{Par suite, on peut écrire } \begin{cases} v(t) = R.i(t) \\ v(t) = \frac{1}{C} \int i(t).dt \\ v(t) = L. \frac{di(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{V} = R.\tilde{I} \\ \tilde{V} = \frac{1}{jC\omega} .\tilde{I} \\ \tilde{V} = jL\omega.\tilde{I} \end{cases}$$

# Exemples

## ■ Propagation des OEM

Dans l'étude de la propagation des OEM, les quantités scalaires (courant, tension) et vectorielles (champ électrique et magnétique) sont fonction de l'espace et du temps.

Si  $v(z,t)$  est la tension instantanée au temps  $t$  en  $z$ ,

$\tilde{v}(z,t)$  sa valeur instantanée complexe s'écrit en régime sinusoïdal :

$$\tilde{v}(z,t) = \tilde{V}(z)e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \tilde{V}(z) = V(z)e^{j\phi(z)} \quad \text{est l'amplitude complexe}$$

sa valeur instantanée réelle s'écrit donc  $v(z,t) = \text{Re}\{\tilde{v}(z,t)\} = V(z).\cos[\omega * t + \phi(z)]$

# Exemples

## ■ Calcul de puissance avec les complexes

$$\text{Si } v(t) = V_0 \cos(\omega * t + \varphi) \quad \text{et} \quad i(t) = I_0 \cos(\omega * t)$$

$$\text{Alors la puissance moyenne s'écrit, } P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos(\varphi)$$

$$\text{En complexe, } P = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{V}^* \tilde{I}] = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{V} \tilde{I}^*] = \frac{1}{4} \text{Re}[\tilde{V}^* \tilde{I} + \tilde{V} \tilde{I}^*]$$

## Equation de propagation des OEM

- On démontre que les amplitudes complexes  $\tilde{V}$  et  $\tilde{I}$  obéissent à des équations différentielles du type :

$$\frac{d^2\tilde{V}}{dz^2} = \gamma^2\tilde{V} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\tilde{I}}{dz^2} = \gamma^2\tilde{I}$$

Ces deux équations admettent comme solutions :

$$\tilde{V}(z) = \tilde{V}_i e^{-\gamma z} + \tilde{V}_r e^{+\gamma z}$$

$$\tilde{I}(z) = \tilde{I}_i e^{-\gamma z} + \tilde{I}_r e^{+\gamma z}$$

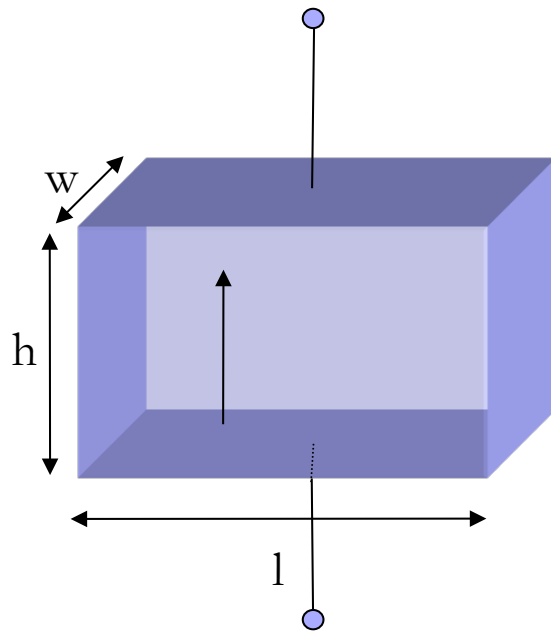
$\tilde{V}_i, \tilde{V}_r, \tilde{I}_i, \tilde{I}_r$  sont des constantes d'intégration



# Notions d'énergie d'une OEM

## ■ Energie du champ électrique

- Pour charger un condensateur plan (créer un champ électrique entre les armature), il faut fournir l'énergie suivante :



$$\text{Puissance (Watt)} = \frac{\text{Energie (Joule)}}{\text{temps (temps)}} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt}$$

$$W = \int_0^T P dt$$

$$W = \int_0^T v(t) \cdot i(t) \cdot dt = \int_0^T \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} \cdot dt = \int_0^{q_0} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$$

$$\text{Or } q_0 = C \cdot v = C \cdot E \cdot h$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{(C \cdot E \cdot h)^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon \cdot S}{h} \cdot E^2 \cdot h^2 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot h \cdot S \cdot E^2$$

rapportée au volume, la densité d'énergie s'écrit :

$$dW = \frac{W}{h \cdot S} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot E^2 \text{ (en Joules/m}^3\text{)}$$

# Notions d'énergie d'une OEM

## ■ Energie du champ magnétique

- Pour évaluer cette énergie, on crée un champ magnétique dans un volume fini (source de tension continue sur inductance) :

Le courant est donné par  $V = L \frac{di}{dt} \Rightarrow i(t) = V \cdot \frac{t}{L}$

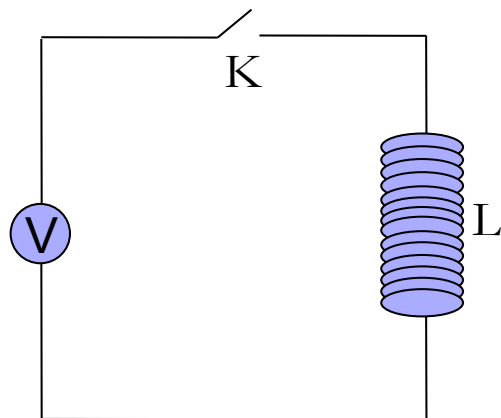
$$W = \int_0^T V \cdot i(t) \cdot dt = \int_0^T V \cdot \frac{V}{L} t \cdot dt = \frac{V \cdot I \cdot T}{2} = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

on définit le flux de l'induction magnétique  $\vec{B}$

par  $\Phi = L \cdot I$  donc  $W = \frac{1}{2} \Phi \cdot I$

pour 1 tore de longueur  $l$  et comprenant  $N$  spires de surface  $S$ ,

on a  $W = \frac{1}{2} N \cdot B \cdot S \cdot I$  ce qui induit une densité d'énergie



# Notions d'énergie d'une OEM

- En un point de l'espace où règne un champ électrique :

$$dW_E = \frac{W_E}{h.S} = \frac{1}{2} \epsilon . E^2 \text{ (en Joules/m}^3\text{)}$$

- En un point de l'espace où règne un champ magnétique :

$$dW_M = \frac{W_M}{h.S} = \frac{1}{2} \mu . H^2 \text{ (en Joules/m}^3\text{)}$$

- On montre que les densités d'énergie pour une OEM sont égales :

$$dW_E = dW_M$$

## Notions de puissance transportée

- Les calculs effectués en TD montreront que les énergies associées à une OEM sont faibles,
- La puissance transportée par une OEM est égale à la densité d'énergie transmise  $dW$  (traversant une surface  $S$  pendant une seconde) soit

$$P = \text{vitesse onde} * \text{surface} * \text{densité énergie}$$

- Pour une OEM, la vitesse vaut  $3 \cdot 10^8$  m/s, donc la puissance transportée peut être très importante.

## Remarques

- Les OEM se déplacent en ligne droite dans l'air :
  - Émetteurs et récepteurs doivent être en vue directe,
    - Pas trop éloignés les uns des autres ( $\text{puissance} = K / \text{distance}^2$ ),
    - Suffisamment hauts pour ne pas être gênés par la sphéricité de la Terre.
- Les ondes EM sont polarisées (direction de /terre):
  - Polarisation verticale (antenne voiture, AM, FM), le champ électrique est perpendiculaire au sol.
  - Polarisation horizontale (antenne TV), le champ électrique est parallèle au sol.



# Rappels

## ■ Rapport de puissance et dB

$$P(dB) = 10 * \log\left(\frac{P_S}{P_E}\right)$$

- Les valeurs en dB s'ajoutent, se retranchent pour indiquer les effets de plusieurs amplificateurs (valeurs +), d'atténuateurs (valeurs -). Les dB ne représentent pas une puissance mais un rapport de puissances.

## ■ Puissance et dBm

- Un dBm représente le niveau de puissance relatif à 1 mW

$$P(dBm) = 10 * \log\left(\frac{P_S}{1 \text{ mW}}\right)$$

- Une puissance de -15 dBm à l'entrée d'un ampli de gain 10 dB donne une puissance de -5 dBm en sortie

## Equation de propagation des OEM

- Pour une tension et un courant sous forme complexe :

$$\tilde{v}(z, t) = \tilde{V}(z).e^{j\omega t}$$

$$\tilde{i}(z, t) = \tilde{I}(z).e^{j\omega t}$$

Les amplitudes complexes obéissent aux équations :

$$\frac{d^2\tilde{V}}{dz^2} = \gamma^2\tilde{V} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\tilde{I}}{dz^2} = \gamma^2\tilde{I}$$

Ces deux équations admettent comme solutions :

$$\tilde{V}(z) = \tilde{V}_i e^{-\gamma z} + \tilde{V}_r e^{+\gamma z}$$

$$\tilde{I}(z) = \tilde{I}_i e^{-\gamma z} + \tilde{I}_r e^{+\gamma z}$$

# Equation de propagation des OEM

$$\begin{aligned}\tilde{V}(z) &= \tilde{V}_i e^{-\gamma z} + \tilde{V}_r e^{+\gamma z} \\ \tilde{I}(z) &= \tilde{I}_i e^{-\gamma z} + \tilde{I}_r e^{+\gamma z}\end{aligned}$$

- $\tilde{V}_i, \tilde{V}_r, \tilde{I}_i, \tilde{I}_r$  sont des constantes d'intégration,
- $\gamma = \alpha + j\beta$  appelée est la constante de propagation
- La solution est la somme de deux termes :
  - L'un dont l'amplitude diminue lorsque  $z$  augmente, pour un déplacement du générateur vers le récepteur, (c'est une onde incidente).
  - L'autre dont l'amplitude diminue lorsque  $z$  diminue, pour un déplacement du récepteur vers le générateur, (c'est une onde réfléchie).



# Equation de propagation des OEM

Valeur instantanée de l'onde de tension incidente :

$$\tilde{v}_i(z,t) = \tilde{V}_i e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

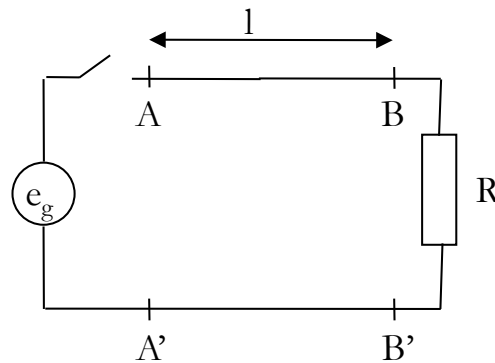
$$\text{or } \tilde{V}_i = V_i e^{j\phi}$$

$$\text{d'où } v_i(z,t) = \text{Re}\{\tilde{v}_i(z,t)\} = V_i \cos(\omega t + \phi - \beta z)$$

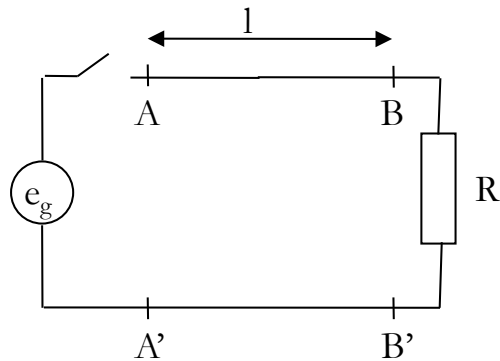
- En un point donné de la ligne, la tension est une fonction sinusoïdale du temps de **période** :  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$
- A un instant donné, la tension est une fonction sinusoïdale de l'abscisse  $z$ , dont la périodicité est la **longueur d'onde** :  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$
- Cette onde se déplace vers les  $z$  croissants avec une vitesse constante appelée **vitesse de phase** :  $V_{phase} = \frac{\omega}{\beta}$

# Propagation d'une onde de tension, de courant.

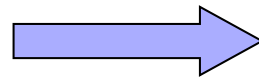
- Perturbation (échelon ou impulsion) se propageant sur une ligne, ceci permet de séparer facilement les ondes incidentes des ondes réfléchies. Applications en hyperfréquences (radio-navigation, radars, ...).
- On considère un générateur, couplé à une ligne de transmission et fermée par une charge résistive.



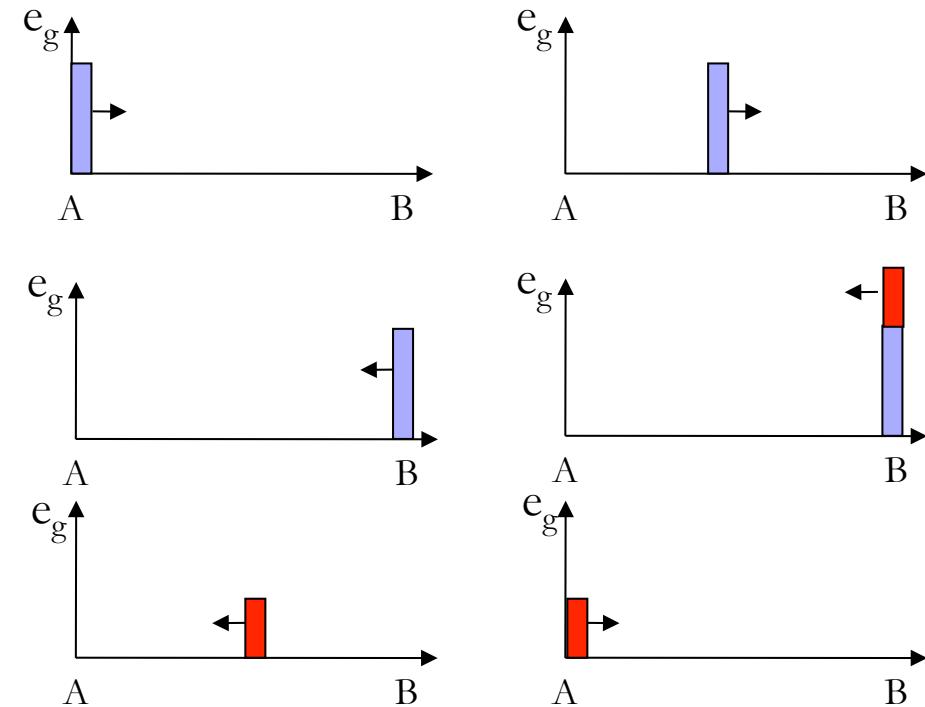
# Propagation d'une onde de tension, de courant.



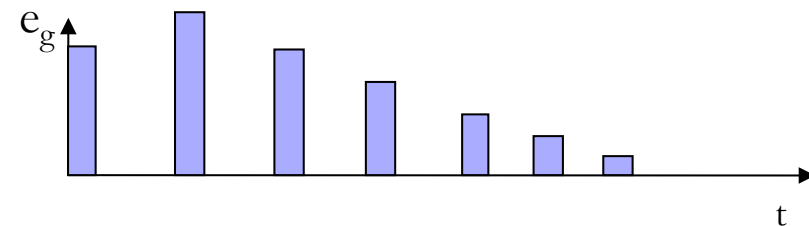
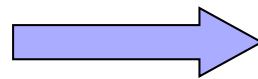
Tension sur la ligne  
à différents instants



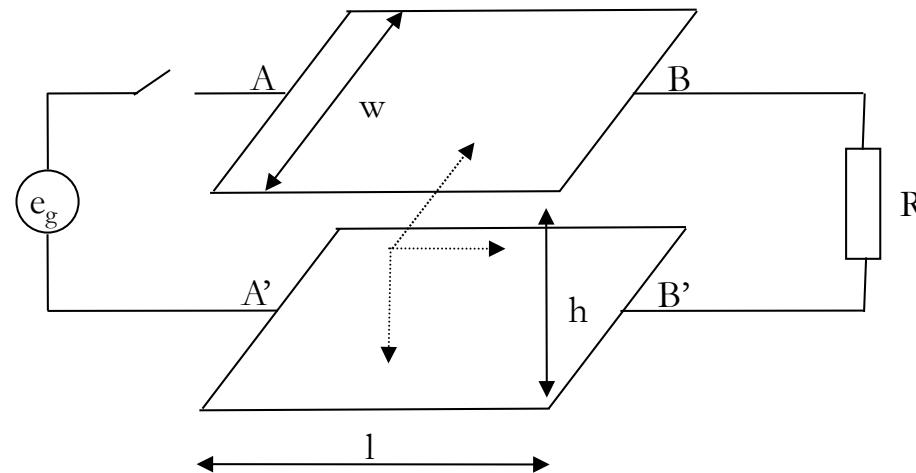
anim



Tension en un point donné  
en fonction du temps



# Propagation d'une onde de tension, de courant.

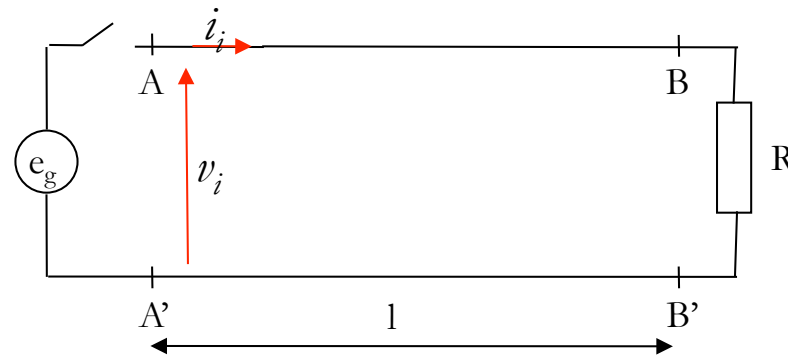


- Lorsque l'on ferme l'interrupteur, il apparaît :
  - une tension au début de la ligne qui induit un champ électrique :
  - Un courant qui crée un champ magnétique :
- A cette OEM, on associe une onde de tension et une onde de courant qui vont se déplacer dans le sens des  $z +$ , notées  $v_i$  et  $i_i$ .



# Propagation d'une onde de tension, de courant.

- Résistance caractéristique de la ligne :



- Le courant  $i_i$  ne peut pas dépendre de la résistance  $R$  au bout de la ligne, car celle-ci n'est pas atteinte immédiatement. Il ne dépend donc que de la source, de la ligne et de  $v_i$ .
- Le rapport  $\frac{v_i}{i_i} = R_c$  est appelé résistance caractéristique de la ligne (câbles coaxiaux  $50 \Omega$ , TV  $75 \Omega$ )

# Propagation d'une onde de tension, de courant.

- Résistance caractéristique de la ligne :

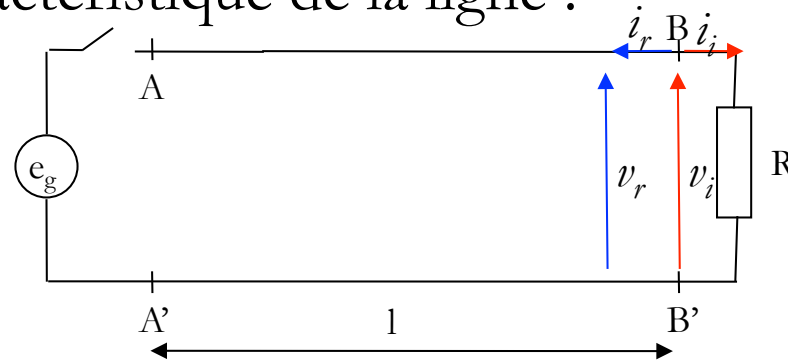


- Si la résistance de charge est égale à  $R_c$ , les ondes  $v_i$  et  $i_i$  vérifient la loi d'Ohm aux bornes de R (il n'y a pas d'onde réfléchie)
- Si la résistance de charge est différente de  $R_c$ , la loi d'Ohm n'est pas vérifiée par  $v_i$  et  $i_i$ . Il va apparaître une perturbation en BB' (onde réfléchie) se propageant dans le sens des z négatifs, telle que  $\frac{v_r}{i_r} = -R_c$
- La somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie vérifie la loi d'Ohm aux bornes de R. On a alors :

$$\frac{V_{BB'}}{I_{BB'}} = \frac{v_i + v_r}{i_i + i_r} = R$$

# Propagation d'une onde de tension, de courant.

- Résistance caractéristique de la ligne :



Par exemple si  $R_C = 50 \Omega$  et  $V = 10V$ , on a :  $v_i = 10 V$  et  $i_i = 0,2 A$

Si  $R = 10 \Omega$ ,  $\frac{v_i}{i_i} \neq 10 \Omega$

# Propagation d'une onde de tension, de courant.

## ■ Facteur de réflexion,

□ On définit ce facteur par le rapport,  $\Gamma = \rho = \frac{v_{réf\ léchie}}{v_{incidente}} = \frac{v_r}{v_i}$

□ La loi d'Ohm nous indique que

$$R = \frac{V_{BB'}}{I_B} = \frac{v_i + v_r}{i_i + i_r} = \frac{v_i + v_r}{\frac{v_i}{R_C} - \frac{v_r}{R_C}} = R_C * \frac{v_i + v_r}{v_i - v_r} = R_C * \frac{1 + \frac{v_r}{v_i}}{1 - \frac{v_r}{v_i}}$$

□ d'où  $(1 - \Gamma) * R = R_C * (1 + \Gamma) \Rightarrow R - \Gamma * R = R_C + \Gamma * R_C$

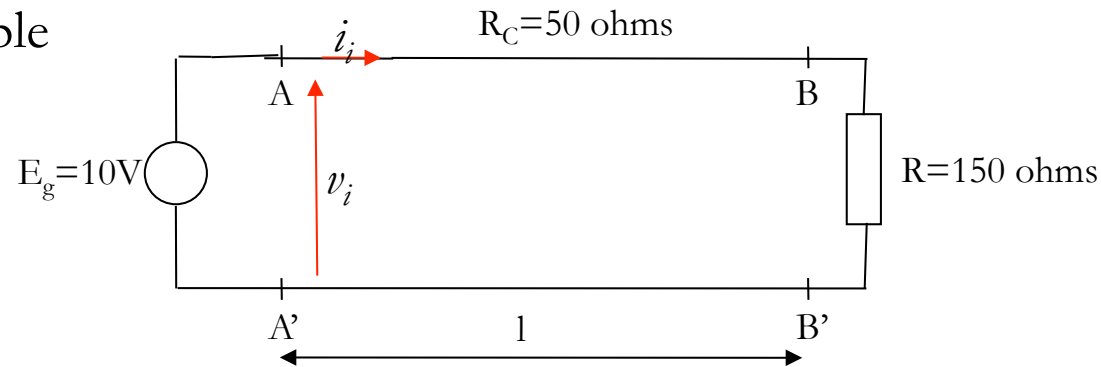
□ soit  $\Gamma = \frac{R - R_C}{R + R_C}$  avec  $-1 \leq \Gamma \leq 1$  (facteur de réflexion en tension)



# Propagation d'une onde de tension, de courant.

## ■ Facteur de réflexion,

### □ Exemple



- On a donc à l'instant  $t=0$ , une onde de tension  $v_i=10V$  se dirigeant vers les  $z$  positifs.
- Au bout d'un certain temps ( $\tau$ ), cette onde arrive à l'extrémité de la ligne. On a alors une onde réfléchie

$$\begin{cases} v_r = \Gamma * v_i = 0,5 * 10 = 5V \\ i_r = -\frac{v_r}{R_C} = -\frac{5}{50} = -0,1A \end{cases}$$

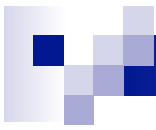
# Propagation d'une onde de tension, de courant.

- Facteur de réflexion,

- Aux bornes de la charge, on a :

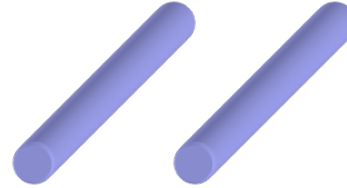
$$\left\{ \begin{array}{l} V_{BB'} = v_i + v_r = 15V \\ I_B = i_i + i_r = 0,2 - 0,1 = 0,1A \\ \frac{V_{BB'}}{I_B} = 150\Omega \end{array} \right.$$

- Lorsque l'onde de tension réfléchie arrive aux générateur (1 AR), une onde de tension se crée et se propage de nouveau dans le sens des z positifs ...



# Modèle d'une ligne de transmission

- On considère une ligne bifilaire :



- En basse fréquence (en dessous de quelques MHz), la ligne est assimilable à une simple résistance,
- Lorsque la fréquence augmente, on voit apparaître un phénomène de filtrage passe-bas (dizaine de MHz à centaines de MHz) dépendant de la longueur de la ligne. Ceci peut être modélisé par un condensateur en parallèle sur la ligne,
- Si la fréquence augmente encore, la tension en bout de ligne n'est pas égale à la tension à son entrée, il se produit un phénomène de propagation. Ceci est dû à un comportement inductif de la ligne, lié à un phénomène d'auto-inductance.
- Enfin, si le diélectrique entre les conducteurs n'est pas parfait, un courant de fuite peut circuler entre eux. Ceci engendre des pertes que l'on peut modéliser par une résistance (ou conductance) en parallèle.

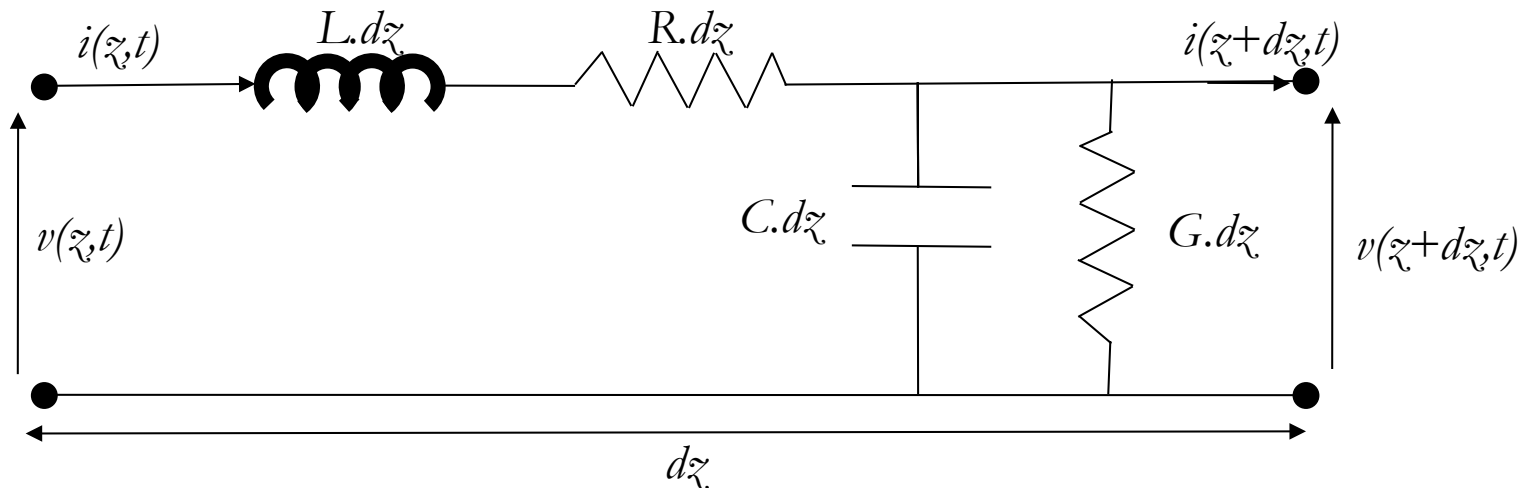
# Modèle d'une ligne de transmission

- Le modèle comporte donc 4 paramètres :
  - R : Résistance en série ( $\Omega$ ),
  - L : Inductance en série (H),
  - C : Capacité en parallèle (F),
  - G : Conductance parallèle (S).
  
- Ce modèle est appelé modèle « localisé » en « discret », c'est un filtre du type passe-bas du seconde ordre. Toutefois, afin de tenir compte des effets de propagation, il est nécessaire de trouver un modèle plus exact.
  
- La technique consiste à établir un modèle d'une section de longueur infinitésimale de ligne, puis ensuite d'intégrer les équations différentielles obtenues.

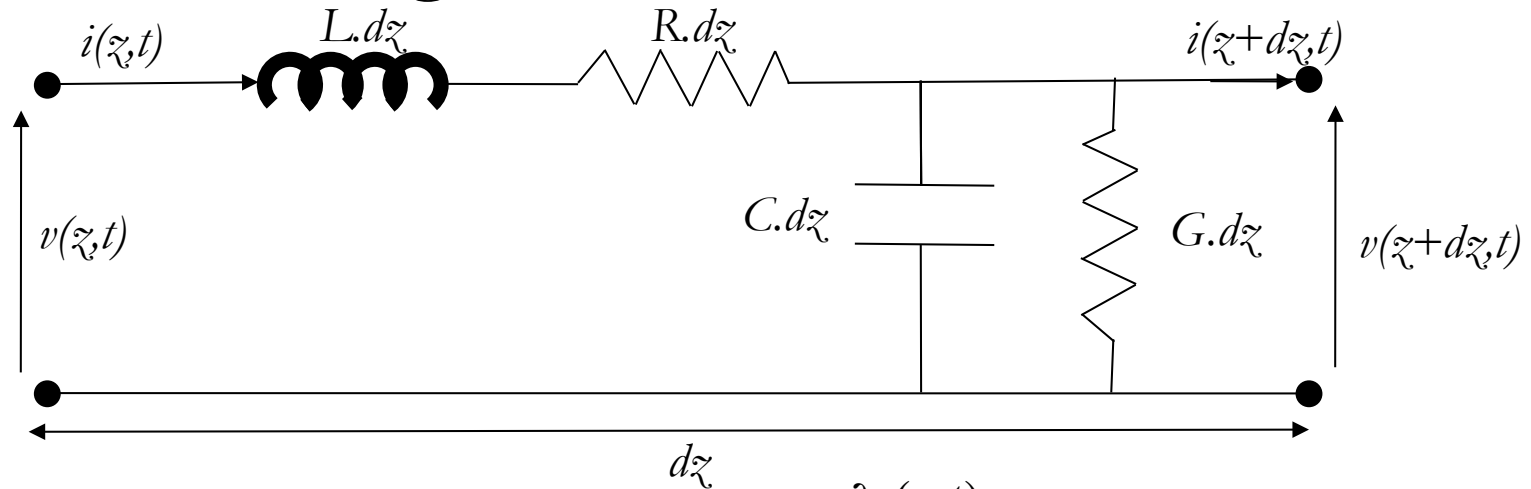
# Modèle d'une ligne de transmission

- On considère une ligne de longueur infinitésimale  $dz$ .  
On définit alors des paramètres linéiques de ligne :

- R : Résistance linéique en série ( $\Omega/m$ ),
  - L : Inductance linéique en série (H/m),
  - C : Capacité linéique en parallèle (F/m),
  - G : Conductance linéique parallèle (S/m).
- } Paramètres primaires de la ligne



# Modèle d'une ligne de transmission



- On considère que  $v(z + dz, t) = v(z, t) + \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} * dz$  et  $v(z + dz, t) - v(z, t)$  est faible
- On a donc : 
$$v(z, t) = v(z + dz, t) + R * dz * i(z, t) + L * dz * \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$
- Soit : 
$$v(z + dz, t) - v(z, t) = -R * dz * i(z, t) - L * dz * \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$
- Et également : 
$$i(z, t) = i(z + dz, t) + G * dz * v(z, t) + C * dz * \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$
- Soit : 
$$i(z + dz, t) - i(z, t) = -G * dz * v(z, t) - C * dz * \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$



# Modèle d'une ligne de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} v(z + dz, t) - v(z, t) = -R * dz * i(z, t) - L * dz * \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ \frac{v(z + dz, t) - v(z, t)}{dz} = -R * i(z, t) - L * \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -R * i(z, t) - L * \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i(z + dz, t) - i(z, t) = -G * dz * v(z, t) - C * dz * \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \\ \frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{dz} = -G * v(z, t) - C * \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -G * v(z, t) - C * \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$



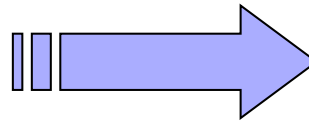
# Modèle d'une ligne de transmission

- Utilisation des complexes

$$\tilde{v}(z, t) = \tilde{V}(z) \cdot e^{j\omega t}$$

$$\tilde{i}(z, t) = \tilde{I}(z) \cdot e^{j\omega t}$$

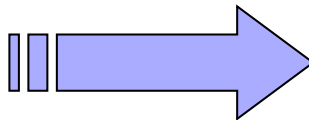
$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -R * i(z, t) - L * \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$



$$\frac{\partial \tilde{V}(z)}{\partial z} = -R * \tilde{I}(z) - j * L * \omega * \tilde{I}(z)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}(z)}{\partial z} = -(R + j * L * \omega) * \tilde{I}(z)$$

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -G * v(z, t) - C * \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$



$$\frac{\partial \tilde{I}(z)}{\partial z} = -G * \tilde{V}(z) - j * C * \omega * \tilde{V}(z)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}(z)}{\partial z} = -(G + j * C * \omega) * \tilde{V}(z)$$

# Modèle d'une ligne de transmission

$$\frac{\partial \tilde{I}(z)}{\partial z} = -(G + j * C * \omega) * \tilde{V}(z) \quad \text{Dérivée / z} \quad \frac{\partial^2 \tilde{I}(z)}{\partial z^2} = -(G + j * C * \omega) * \frac{\partial \tilde{V}(z)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}(z)}{\partial z} = -(R + j * L * \omega) * \tilde{I}(z) \quad \text{Équation des télégraphistes} \quad \frac{\partial^2 \tilde{I}(z)}{\partial z^2} = (R + j * L * \omega) * (G + j * C * \omega) * \tilde{I}(z)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{I}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 * \tilde{I}(z) = 0$$

$$\text{avec } \gamma = \sqrt{(G + j * C * \omega) * (R + j * L * \omega)}$$

## Modèle d'une ligne de transmission

- De la même façon pour l'amplitude complexe de tension, on a :

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 * \tilde{V}(z) = 0$$

$$\text{avec } \gamma = \sqrt{(G + j * C * \omega) * (R + j * L * \omega)}$$

# Modèle d'une ligne de transmission

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 * \tilde{V}(z) = 0$$

$$\text{avec } \gamma = \sqrt{(G + j * C * \omega) * (R + j * L * \omega)}$$

Onde de tension

$$\frac{\partial^2 \tilde{I}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 * \tilde{I}(z) = 0$$

$$\text{avec } \gamma = \sqrt{(G + j * C * \omega) * (R + j * L * \omega)}$$

Onde de courant

On posera dorénavant :  $\gamma = \alpha + j\beta$

avec  $\alpha$  la constante d'affaiblissement (Népers/m)  $\alpha = \frac{1}{l} \ln\left(\frac{V_e}{V_s}\right)$

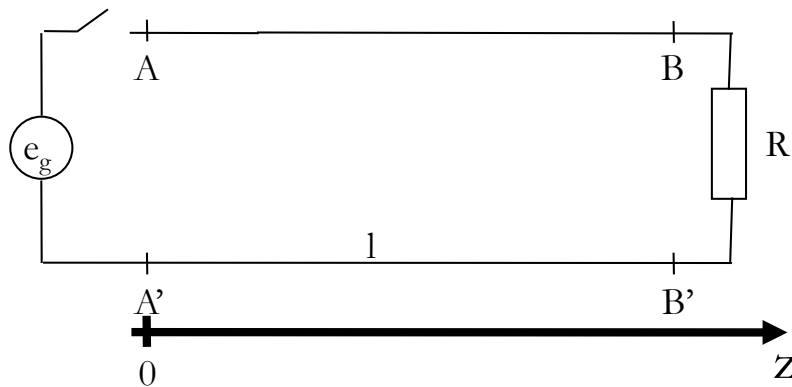
et  $\beta$  la constante de phase (rad/m)  $V_{phase} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi}{T \cdot \beta} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

## Solutions des équations de propagation (onde de tension et onde de courant)

$$\begin{aligned}\tilde{V}(z) &= \tilde{V}_i e^{-\gamma z} + \tilde{V}_r e^{+\gamma z} \\ \tilde{I}(z) &= \tilde{I}_i e^{-\gamma z} + \tilde{I}_r e^{+\gamma z}\end{aligned}$$

- $\tilde{V}_i, \tilde{V}_r, \tilde{I}_i, \tilde{I}_r$  sont des constantes d'intégration,
- La solution est la somme de deux termes :
  - L'un dont l'amplitude diminue lorsque  $z$  augmente, pour un déplacement du générateur vers le récepteur, (c'est une onde incidente).
  - L'autre dont l'amplitude diminue lorsque  $z$  diminue, pour un déplacement du récepteur vers le générateur, (c'est une onde réfléchie).

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne



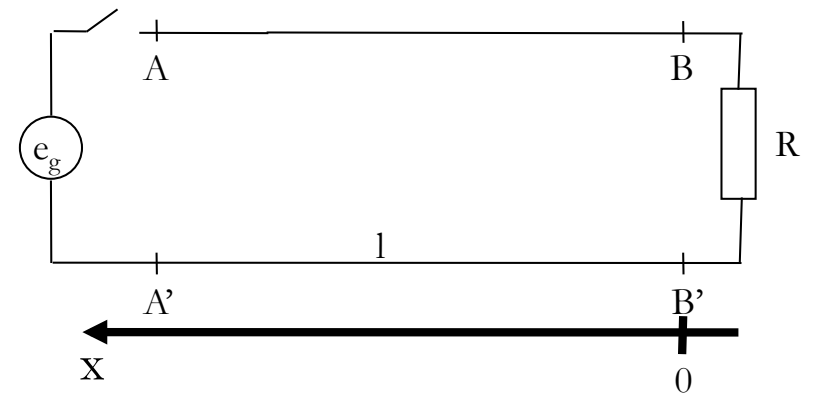
Origine des distances à l'entrée de la ligne

$$\tilde{V}(z) = \tilde{V}_i e^{-\gamma z} + \tilde{V}_r e^{+\gamma z}$$

$$\tilde{I}(z) = \tilde{I}_i e^{-\gamma z} + \tilde{I}_r e^{+\gamma z}$$

En  $z=0$ , on obtient la tension et le courant à l'entrée de la ligne.

$z$  en  $-x$



Origine des distances à la charge

$$\tilde{V}(x) = \tilde{V}_i e^{+\gamma x} + \tilde{V}_r e^{-\gamma x}$$

$$\tilde{I}(x) = \tilde{I}_i e^{+\gamma x} + \tilde{I}_r e^{-\gamma x}$$

En  $x=0$ , on obtient la tension et le courant à la charge.

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Origine des distances à la charge

$$\text{en } x = 0 \begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_i e^{+\gamma x} + \tilde{V}_r e^{-\gamma x} \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_i e^{+\gamma x} + \tilde{I}_r e^{-\gamma x} \end{cases} \text{ devient } \begin{cases} \tilde{V}(0) = \tilde{V}_i + \tilde{V}_r = \tilde{V}_R \\ \tilde{I}(0) = \tilde{I}_i + \tilde{I}_r = \tilde{I}_R \end{cases}$$

$$\text{on rappelle que } Z_C = \frac{\tilde{V}_i}{\tilde{I}_i} = -\frac{\tilde{V}_r}{\tilde{I}_r}$$

$$\begin{cases} \frac{\tilde{V}_R}{Z_C} = \frac{\tilde{V}_i}{Z_C} + \frac{\tilde{V}_r}{Z_C} \\ \tilde{I}_R = \frac{\tilde{V}_i}{Z_C} - \frac{\tilde{V}_r}{Z_C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{V}_i = \frac{\tilde{V}_R + Z_C \tilde{I}_R}{2} \\ \tilde{V}_r = \frac{\tilde{V}_R - Z_C \tilde{I}_R}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \tilde{I}_i = \frac{\tilde{V}_R + Z_C \tilde{I}_R}{2 Z_C} \\ \tilde{I}_r = \frac{-\tilde{V}_R + Z_C \tilde{I}_R}{2 Z_C} \end{cases}$$

## Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- On obtient donc,

$$\text{en tout point de la ligne : } \begin{cases} \tilde{V}(x) = \left( \frac{\tilde{V}_R + Z_C \tilde{I}_R}{2} \right) e^{+\gamma x} + \left( \frac{\tilde{V}_R - Z_C \tilde{I}_R}{2} \right) e^{-\gamma x} \\ \tilde{I}(x) = \left( \frac{\tilde{V}_R + Z_C \tilde{I}_R}{2 Z_C} \right) e^{+\gamma x} + \left( \frac{-\tilde{V}_R + Z_C \tilde{I}_R}{2 Z_C} \right) e^{-\gamma x} \end{cases}$$

$$\text{en développant : } \begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_R \cdot \cosh(\gamma \cdot x) + Z_C \tilde{I}_R \cdot \sinh(\gamma \cdot x) \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_R \cdot \cosh(\gamma \cdot x) + \frac{\tilde{V}_R}{Z_C} \cdot \sinh(\gamma \cdot x) \end{cases}$$





## Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Impédance le long de la ligne :

$$\tilde{Z}(x) = \frac{\tilde{V}(x)}{\tilde{I}(x)} \quad \begin{array}{l} \text{en divisant haut et bas par } \cosh(\gamma \cdot x) \cdot \tilde{I}_R \\ \Rightarrow \\ \text{et avec } \tilde{Z}_R = \frac{\tilde{V}_R}{\tilde{I}_R} \end{array} \quad \tilde{Z}(x) = Z_C \cdot \frac{\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_C \cdot \tanh(\gamma \cdot x)}{\tilde{Z}_C + \tilde{Z}_R \cdot \tanh(\gamma \cdot x)}$$

- Coefficient de réflexion :

- C'est le rapport en x, de l'amplitude de l'onde réfléchie sur l'amplitude de l'onde incidente.

$$\tilde{\Gamma}(x) = \frac{\tilde{V}_r \cdot e^{-\gamma x}}{\tilde{V}_i \cdot e^{+\gamma x}} = \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{V}_i} * e^{-2\gamma x}$$

$$\text{or } \begin{cases} \tilde{V}_i = \frac{\tilde{V}_R + Z_C \tilde{I}_R}{2} \\ \tilde{V}_r = \frac{\tilde{V}_R - Z_C \tilde{I}_R}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{V}_i} = \frac{\tilde{V}_R - Z_C \tilde{I}_R}{\tilde{V}_R + Z_C \tilde{I}_R} \xrightarrow{\text{on divise par } \tilde{I}_R} \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{V}_i} = \frac{\tilde{Z}_R - Z_C}{\tilde{Z}_R + Z_C} \Rightarrow \tilde{\Gamma}(x) = \left( \frac{\tilde{Z}_R - Z_C}{\tilde{Z}_R + Z_C} \right) e^{-2\gamma x}$$

## Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Coefficient de réflexion, suite ...

$$\tilde{\Gamma}(x) = \left( \frac{\tilde{Z}_R - Z_C}{\tilde{Z}_R + Z_C} \right) e^{-2\gamma x} \quad \text{en } x=0, \quad \tilde{\Gamma}(0) = \left( \frac{\tilde{Z}_R - Z_C}{\tilde{Z}_R + Z_C} \right) = \tilde{\Gamma}_R = \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{V}_i} = -\frac{\tilde{I}_r}{\tilde{I}_i}$$

- Puissance transportée par une ligne :

$$\begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_i e^{+\gamma x} + \tilde{V}_r e^{-\gamma x} \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_i e^{+\gamma x} + \tilde{I}_r e^{-\gamma x} \end{cases} \quad \text{devient} \quad \begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_i \cdot (e^{+\gamma x} + \tilde{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_i \cdot (e^{+\gamma x} - \tilde{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \end{cases}$$

$$\text{Par définition, } P = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{V}^* \tilde{I}] = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{V} \tilde{I}^*] = \frac{1}{4} \text{Re}[\tilde{V}^* \tilde{I} + \tilde{V} \tilde{I}^*]$$

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Puissance transportée par une ligne, suite ...

$$P(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \left( \tilde{V}_i \cdot (e^{+\gamma x} + \tilde{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \right)^* \cdot \left( \tilde{I}_i \cdot (e^{+\gamma x} - \tilde{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \right) \right]$$

or on sait que :  $\tilde{I}_i = \frac{\tilde{V}_i}{Z_C}$

$$P(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \left( \tilde{V}_i \cdot (e^{+\gamma x} + \tilde{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \right)^* \cdot \left( \frac{\tilde{V}_i}{Z_C} \cdot (e^{+\gamma x} - \tilde{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \right) \right]$$

$$P(x) = \frac{V_i^2}{2 \cdot Z_C} \left[ e^{2\alpha x} - \Gamma_R^2 e^{-2\alpha x} \right]$$

## Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Pour une ligne sans perte, on a :

$$\begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_R \cdot \cosh(j\beta \cdot x) + Z_C \tilde{I}_R \cdot \sinh(j\beta \cdot x) \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_R \cdot \cosh(j\beta \cdot x) + \frac{\tilde{V}_R}{Z_C} \cdot \sinh(j\beta \cdot x) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \cosh(j\beta \cdot x) = \cos(\beta \cdot x) \\ \sinh(j\beta \cdot x) = j \cdot \sin(\beta \cdot x) \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_R \cdot \cos(\beta \cdot x) + j Z_C \tilde{I}_R \cdot \sin(\beta \cdot x) \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_R \cdot \cos(\beta \cdot x) + j \cdot \frac{\tilde{V}_R}{Z_C} \cdot \sin(\beta \cdot x) \end{cases} \quad \tilde{\Gamma}(x) = \left( \frac{\tilde{Z}_R - Z_C}{\tilde{Z}_R + Z_C} \right) e^{-2j\beta x}$$

$$\tilde{Z}(x) = Z_C \cdot \frac{\tilde{Z}_R + j \cdot \tilde{Z}_C \cdot \tan(\beta \cdot x)}{\tilde{Z}_C + j \cdot \tilde{Z}_R \cdot \tan(\beta \cdot x)} \quad P(x) = \frac{V_i^2}{2 \cdot Z_C} \left[ 1 - \Gamma_R^2 \right]$$

## Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

### ■ Cas de la ligne adaptée :

□ Dans ce cas,  $\tilde{Z}_R = \tilde{Z}_C \Rightarrow \tilde{\Gamma}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\tilde{V}_r \cdot e^{-\gamma x}}{\tilde{V}_i \cdot e^{+\gamma x}} = 0 \Rightarrow \tilde{V}_r = 0$

□ Il n'y a aucune onde réfléchie.

$$\begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_i \cdot e^{+\gamma x} \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_i \cdot e^{+\gamma x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{v}(x,t) = \tilde{V}_i \cdot e^{+\gamma x} \cdot e^{j\omega t} = \tilde{V}_i \cdot e^{+\alpha x} \cdot e^{j(\omega t + \beta x)} \\ \tilde{i}(x,t) = \tilde{I}_i \cdot e^{+\gamma x} \cdot e^{j\omega t} = \tilde{I}_i \cdot e^{+\alpha x} \cdot e^{j(\omega t + \beta x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(x,t) = V_i \cdot e^{+\alpha x} \cdot \cos(\omega t + \beta x) \\ i(x,t) = I_i \cdot e^{+\alpha x} \cdot \cos(\omega t + \beta x) \end{cases}$$

- $v(x,t)$  et  $i(x,t)$  sont en phase dans le temps et dans l'espace
- On est en présence d'un régime d'ondes progressives

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne



# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Cas général :

$$\tilde{\Gamma}(0) = \left( \frac{\tilde{Z}_R - Z_C}{\tilde{Z}_R + Z_C} \right) = \tilde{\Gamma}_R = \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{V}_i} = -\frac{\tilde{I}_r}{\tilde{I}_i}$$

$$\begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_i e^{+\gamma x} + \tilde{V}_r e^{-\gamma x} \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_i e^{+\gamma x} + \tilde{I}_r e^{-\gamma x} \end{cases} \text{ devient } \begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_i \cdot (e^{+\gamma x} + \tilde{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_i \cdot (e^{+\gamma x} - \tilde{\Gamma}_R e^{-\gamma x}) \end{cases}$$

$$\text{ou encore } \begin{cases} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_i e^{+\gamma x} (1 + \tilde{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}) \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_i e^{+\gamma x} (1 - \tilde{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}) \end{cases}$$

$$\text{et } \tilde{Z}(x) = \frac{\tilde{V}(x)}{\tilde{I}(x)} = Z_C \frac{1 + \tilde{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}}{1 - \tilde{\Gamma}_R e^{-2\gamma x}}$$

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Cas général :

- Pour une ligne sans perte

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}(x) = \tilde{V}_i \cdot e^{+j\beta x} (1 + \Gamma_R \cdot e^{j(\phi - 2\beta x)}) \\ \tilde{I}(x) = \tilde{I}_i \cdot e^{+j\beta x} (1 - \Gamma_R \cdot e^{j(\phi - 2\beta x)}) \\ \tilde{Z}(x) = Z_C \frac{1 + \Gamma_R \cdot e^{j(\phi - 2\beta x)}}{1 - \Gamma_R \cdot e^{j(\phi - 2\beta x)}} \end{array} \right.$$



# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

## ■ Cas général :

□ Pour une ligne sans perte, suite ...

- Les valeurs efficaces sont égales au module des amplitudes complexes divisées par

$$\text{on obtient } \left\{ \begin{array}{l} V(x) = \frac{V_i}{\sqrt{2}} |1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}| \\ I(x) = \frac{I_i}{\sqrt{2}} |1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}| \\ Z(x) = Z_C \frac{|1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}|}{|1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}|} \end{array} \right.$$

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Cas général :
  - Pour une ligne sans perte, suite ...
    - Etude des variations de V, I, Z

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x) = \frac{V_i}{\sqrt{2}} |1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}| \\ I(x) = \frac{I_i}{\sqrt{2}} |1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}| \\ Z(x) = Z_C \frac{|1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}|}{|1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}|} \end{array} \right. = 1 \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} V_M = \frac{V_i}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma_R) \text{ tension maxi} \\ I_m = \frac{I_i}{\sqrt{2}} (1 - \Gamma_R) \text{ courant mini} \\ Z_M = Z_C \frac{(1 + \Gamma_R)}{(1 - \Gamma_R)}, \text{ impédance maxi} \end{array} \right.$$

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Cas général :
  - Pour une ligne sans perte, suite ...
    - Etude des variations de V, I, Z

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x) = \frac{V_i}{\sqrt{2}} |1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}| \\ I(x) = \frac{I_i}{\sqrt{2}} |1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}| \\ Z(x) = Z_C \frac{|1 + \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}|}{|1 - \Gamma_R e^{j(\phi - 2\beta x)}|} \end{array} \right. = -1 \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} V_m = \frac{V_i}{\sqrt{2}} (1 - \Gamma_R), \text{ tension mini} \\ I_M = \frac{I_i}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma_R), \text{ courant maxi} \\ Z_m = Z_C \frac{(1 - \Gamma_R)}{(1 + \Gamma_R)}, \text{ impédance mini} \end{array} \right.$$

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Cas général :

- Pour une ligne sans perte, suite ...

- Deux maxima sont séparés par  $\lambda/2$ , par exemple pour la tension :

$$\phi - 2\beta x = 2k\pi$$

$$\phi - 2\beta x_1 = 0 \quad (k = 0) \quad \longrightarrow \quad x_1 - x_2 = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{car } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\phi - 2\beta x_2 = 2\pi \quad (k = 1)$$

- Idem pour les minima

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

## ■ Cas général :

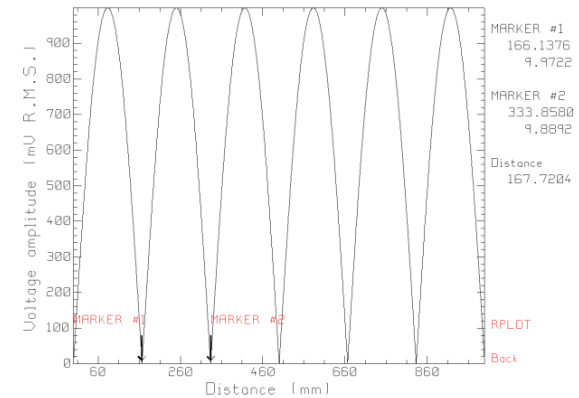
### □ Deux cas particuliers

- $\Gamma_R=1$  (ligne en circuit ouvert),

$$V_M = \frac{V_i}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma_R) = 2 \frac{V_i}{\sqrt{2}}$$

$$V_m = \frac{V_i}{\sqrt{2}} (1 - \Gamma_R) = 0$$

Régime d'ondes stationnaires

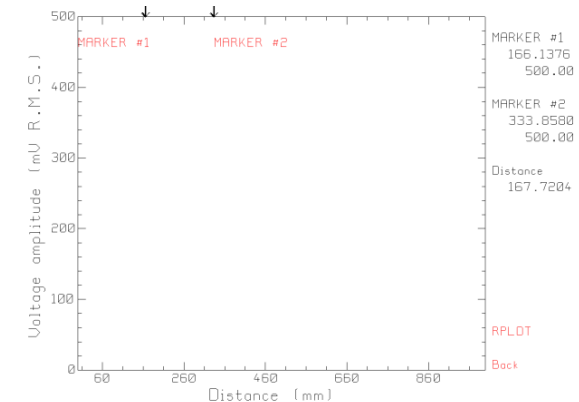


- $\Gamma_R=0$  (charge adaptée à la ligne),

$$V_M = \frac{V_i}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma_R) = \frac{V_i}{\sqrt{2}}$$

$$V_m = \frac{V_i}{\sqrt{2}} (1 - \Gamma_R) = \frac{V_i}{\sqrt{2}}$$

Régime d'ondes progressives



# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Cas général :

- Pour une ligne sans perte, suite ...

- Reprenons l'expression de la tension efficace le long de la ligne

$$V(x) = \frac{V_i}{\sqrt{2}} \left| 1 + \Gamma_R \cdot e^{j(\phi - 2\beta x)} \right|$$

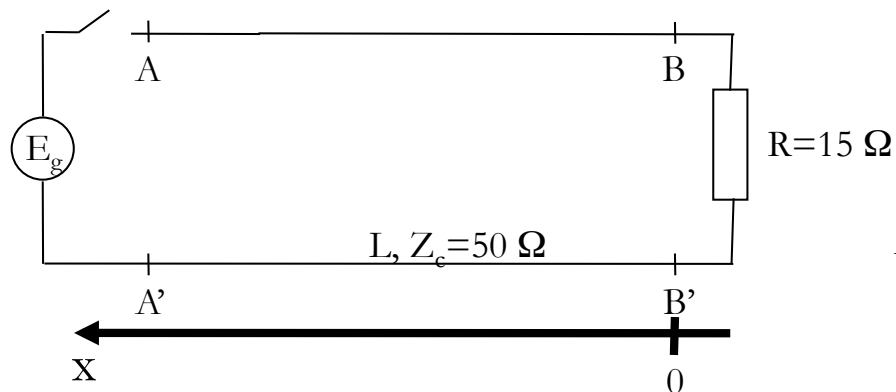
$$V(x) = \frac{V_i}{\sqrt{2}} \left| 1 + \Gamma_R \cdot (\cos(\phi - 2\beta x) + j \sin(\phi - 2\beta x)) \right|$$

$$V(x) = \frac{V_i}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2\Gamma_R \cdot \cos(\phi - 2\beta x) + \Gamma_R^2}$$

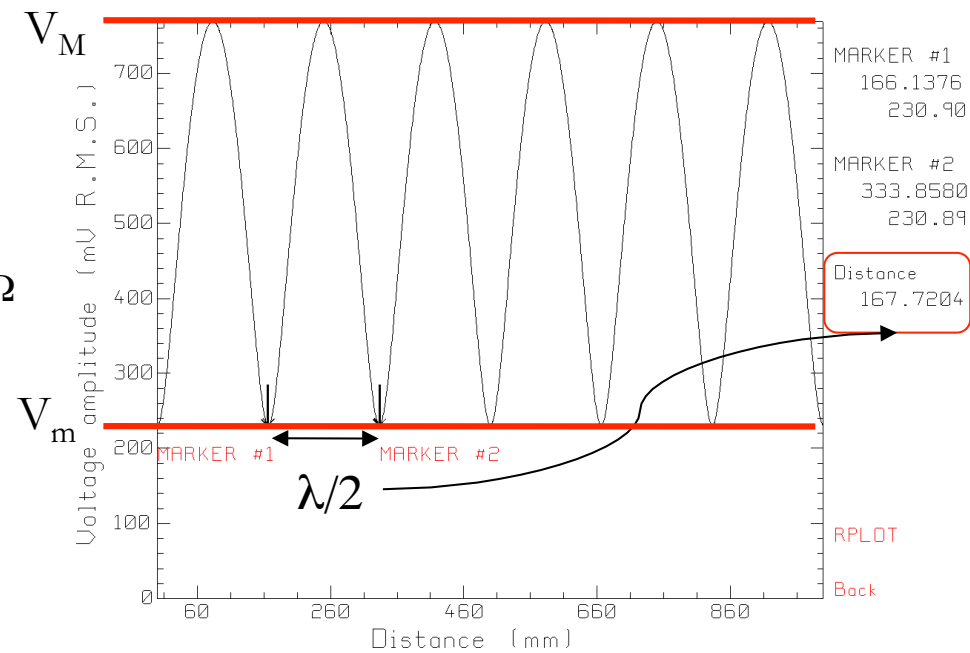
# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

- Cas général :
  - Pour une ligne sans perte, suite ...

exemple



$E_g = 1 \text{ V}$ , fréq = 900 MHz, ligne à air

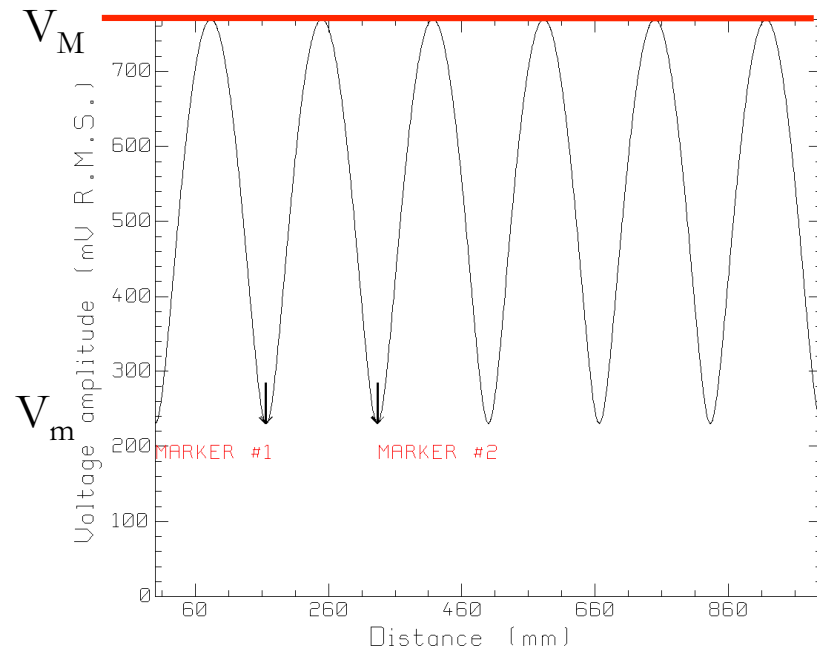


$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{900 \cdot 10^6} = 0,333$$

# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

## ■ Cas général :

- Pour une ligne sans perte, suite ...



Décomposition en deux sous-régimes :

- régime d'ondes progressives d'amplitude  $V_m$ .
- régime d'ondes stationnaires d'amplitude 0 à  $V_M - V_m$ .



# Etude de la réflexion à l'extrémité d'une ligne

## ■ Cas général :

- Définition du rapport d'onde stationnaire (R.O.S.) ou taux d'ondes stationnaires (T.O.S.)

$$R.O.S. = s = \frac{V_M}{V_m} = \frac{I_M}{I_m}$$

On a également, 
$$s = \frac{1 + |\Gamma_R|}{1 - |\Gamma_R|}$$

Comme 
$$0 \leq |\Gamma_R| \leq 1 \Rightarrow 1 < s < \infty$$

De plus 
$$Z_M = s.Z_C \quad \text{et} \quad Z_m = \frac{Z_C}{s}$$

# Mesure de l'impédance de charge d'une ligne

- On rappelle :

$$\square \tilde{\Gamma}_R = \left( \frac{\tilde{Z}_R - Z_C}{\tilde{Z}_R + Z_C} \right) \quad \longrightarrow \quad \tilde{Z}_R = Z_C \left( \frac{1 + \tilde{\Gamma}_R}{1 - \tilde{\Gamma}_R} \right) \quad \text{avec} \quad \tilde{\Gamma}_R = |\tilde{\Gamma}_R| e^{j\phi}$$

$$\square R.O.S. = s = \frac{V_{Max}}{V_{min}} = \frac{I_{Max}}{I_{min}} = \frac{1 + |\Gamma_R|}{1 - |\Gamma_R|}$$

- Connaissant  $s$ , on calcule  $|\Gamma_R| = \frac{1+s}{1-s}$  il reste à calculer  $\phi$ , connaissant  $Z_C$ .



# Mesure de l'impédance de charge d'une ligne

## ■ Méthode (suite) :

- On place l'impédance en bout de ligne et on cherche la position  $x_1$  d'un minimum de tension (la différence entre deux minima donne  $\lambda$  et donc  $\beta$ ).
- On remplace par un court-circuit et on cherche la position  $x_2$  d'un minimum de tension.
- On calcule  $\phi = 2\beta(x_1 - x_2) + \pi$
- Puis  $\tilde{\Gamma}_R = |\tilde{\Gamma}_R| \cdot e^{j\phi}$
- $\tilde{Z}_R = Z_C \left( \frac{1 + \tilde{\Gamma}_R}{1 - \tilde{\Gamma}_R} \right)$

# Abaque de Smith

## ■ Intérêt :

- Outil largement utilisé dans le domaine des hyperfréquences
- Permet d'effectuer graphiquement le passage (dans les deux sens) entre le coefficient de réflexion à l'extrémité d'une ligne et l'impédance de charge.
- Ces deux paramètres étant complexes, ils peuvent être représentés dans le plan complexe : un plan cartésien représentant le coefficient de réflexion et un faisceau de courbes représentant l'impédance de charge.

# Abaque de Smith

## ■ Construction :

- Afin d'avoir un abaque indépendant de la valeur de l'impédance caractéristique de la ligne, l'abaque doit être normalisé par rapport à celle-ci.

$$\tilde{\Gamma}(x) = \left( \frac{\tilde{Z}(x) - Z_C}{\tilde{Z}(x) + Z_C} \right) \Rightarrow \tilde{\Gamma}(x) = \left( \frac{\frac{\tilde{Z}(x) - Z_C}{Z_C}}{\frac{\tilde{Z}(x) + Z_C}{Z_C}} \right) = \frac{\tilde{z}(x) - 1}{\tilde{z}(x) + 1}$$

- Sur le plan complexe, on représente le coefficient de réflexion

$$\tilde{\Gamma}(x) = \tilde{\Gamma}_{réelle} + j\tilde{\Gamma}_{imag} = p + jq \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\Gamma}_{réelle} = p = |\tilde{\Gamma}(x)| \cos(\phi) \\ \tilde{\Gamma}_{imag} = q = |\tilde{\Gamma}(x)| \sin(\phi) \end{cases}$$

# Abaque de Smith

## ■ Construction :

- On rappelle que :
- Le plan utilisé dans le diagramme de Smith est le plan complexe des coefficients de réflexion.
- Comme  $|\tilde{\Gamma}_R| \leq 1$  tous les points représentant le coefficient de réflexion seront à l'intérieur d'un cercle de centre 0 et de rayon unité

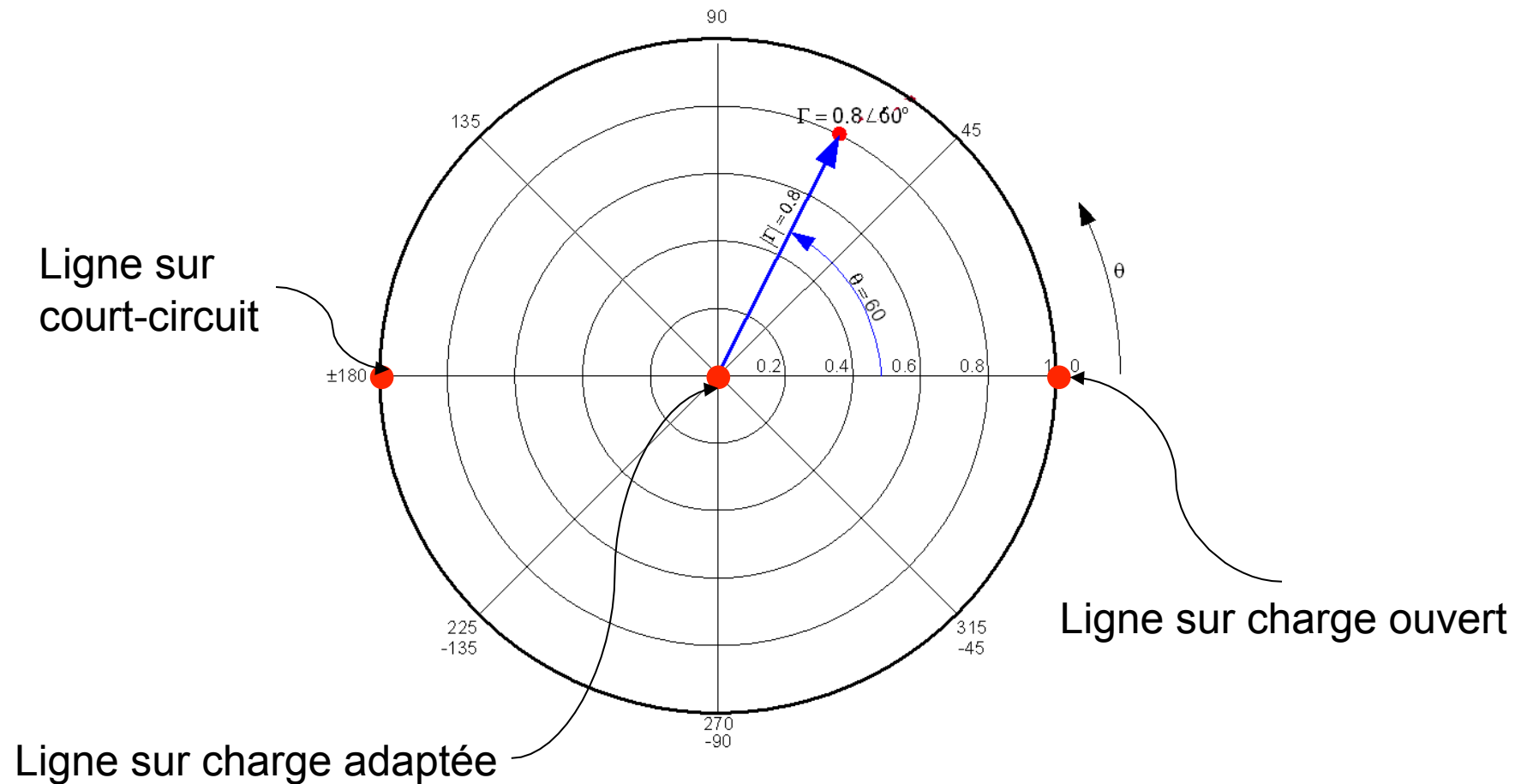
### □ Cas limites :

$|\tilde{\Gamma}| = 1$  correspond aux deux limites :  $|\tilde{Z}| = 0$  et  $|\tilde{Z}| = \infty$

$|\tilde{\Gamma}| = 0$  correspond au cas :  $|\tilde{Z}| = Z_C$

# Abaque de Smith

- Construction (coefficient de réflexion):



# Abaque de Smith

## ■ Construction (coefficient de réflexion):

- Lorsque l'on se déplace sur une ligne sans perte  $|\tilde{\Gamma}(x)| = \text{constant}$  on se déplace sur un cercle dans le diagramme de Smith.
- On fait un tour pour  $x = \lambda / 2$
- En pratique, sur l'abaque de Smith seul le cercle correspondant à  $|\tilde{\Gamma}(x)| = 1$  est représenté.



# Abaque de Smith

- Construction (diagramme d'impédance) :

- De la même façon, on écrit :

$$\tilde{\Gamma}(x) = \frac{\tilde{z}(x) - 1}{\tilde{z}(x) + 1} = \frac{\tilde{z}^{réelle} + j.\tilde{z}^{imag} - 1}{\tilde{z}^{réelle} + j.\tilde{z}^{imag} + 1} = \frac{(\tilde{z}^{réelle} - 1) + j.\tilde{z}^{imag}}{(\tilde{z}^{réelle} + 1) + j.\tilde{z}^{imag}}$$

$$\tilde{\Gamma}(x) = \frac{(r - 1) + jx}{(r + 1) + jx} = p + jq$$

# Abaque de Smith

- Construction (diagramme d'impédance à  $r$  constante) :
  - Lieu des points de l'impédance à  $r$  constante (partie réelle de l'impédance)

$$\tilde{\Gamma}(x) = \frac{(r-1) + jx}{(r+1) + jx} = p + jq = \frac{[(r-1) + jx][r+1 - jx]}{(r+1)^2 + x^2}$$

$$\square \text{ Ou } p + jq = \frac{r^2 - 1 + x^2}{(r+1)^2 + x^2} + j \frac{2x}{(r+1)^2 + x^2}$$

- En égalisant partie réelle et partie imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} r(p-1) + (p+1) = x \cdot q \\ q(r+1) = x(1-p) \end{cases}$$

# Abaque de Smith

- Construction (diagramme d'impédance à  $r$  constante) :

- En éliminant  $x$ , entre les deux équations précédentes, on obtient :

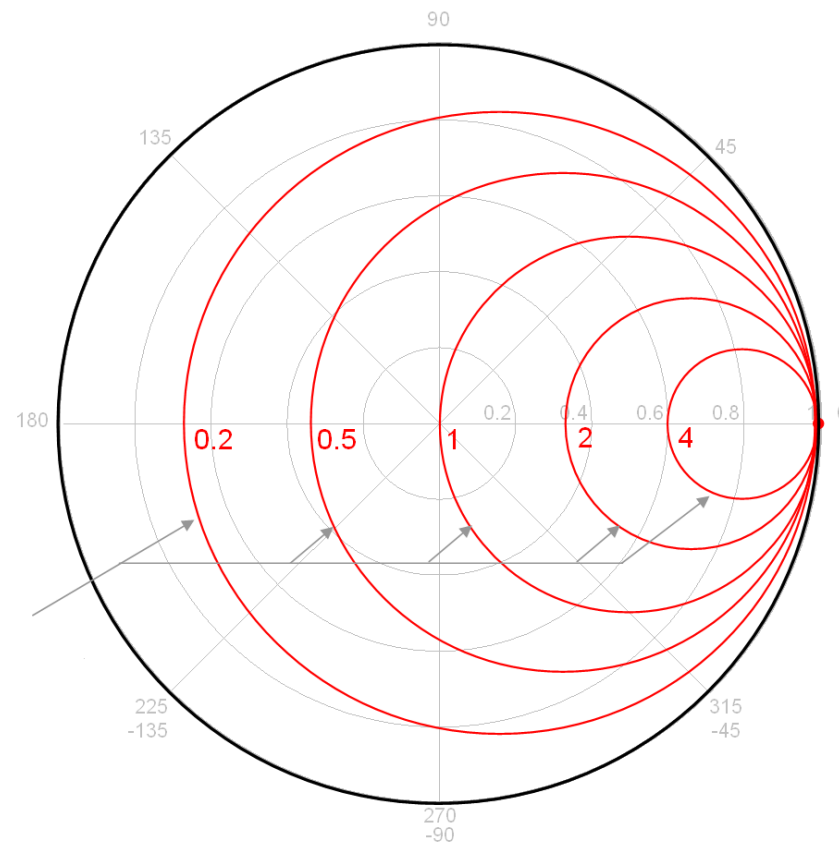
$$\left( p - \frac{r}{1+r} \right)^2 + q^2 = \left( \frac{1}{1+r} \right)^2$$

- C'est l'équation d'un cercle de centre  $\left( \frac{r}{1+r}, 0 \right)$  et de rayon

- Les parties réelles constantes normalisée de l'impédance suivent donc ces cercles

# Abaque de Smith

- Construction (diagramme d'impédance à  $r$  constante ) :



# Abaque de Smith

- Construction (diagramme d'impédance à  $x$  constante) :

- On reprend les équations précédentes et on élimine  $r$ , on obtient :

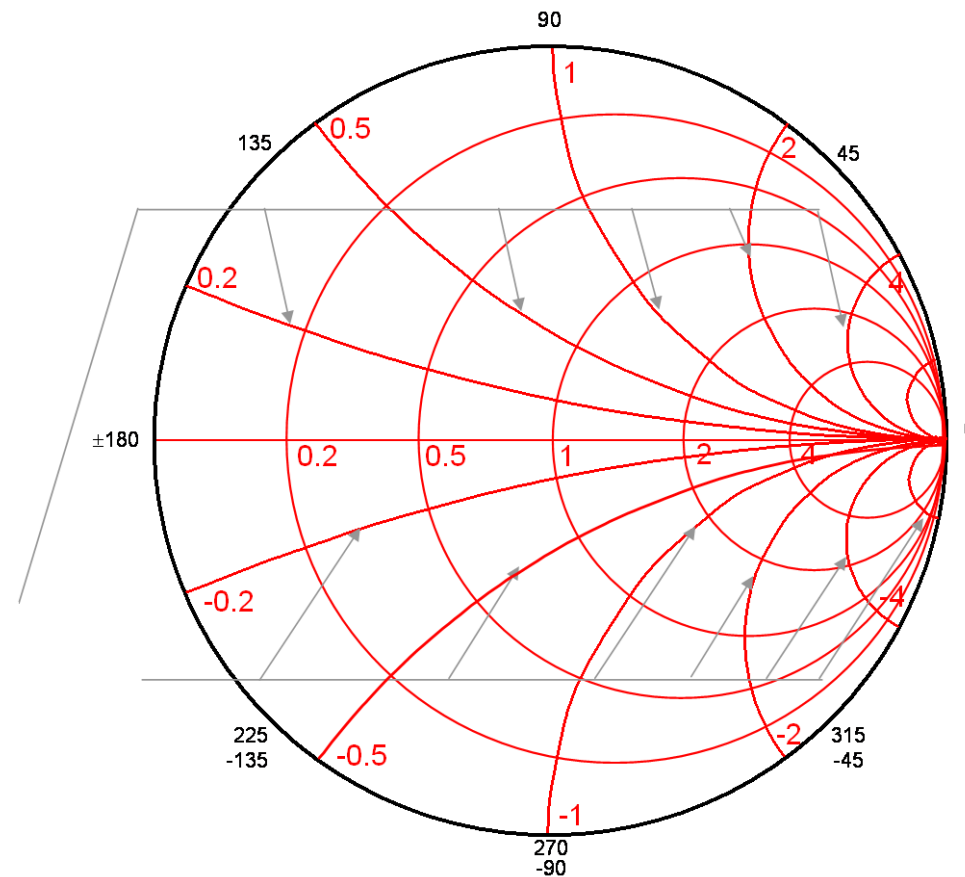
$$(p-1)^2 + \left(q - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

- C'est l'équation d'un cercle de centre  $\left(1, \frac{1}{x}\right)$  et de rayon  $\frac{1}{x}$

- Les parties imaginaires normalisées de l'impédance suivent donc ces cercles. En pratique, on ne trace que la portion de cercle se trouvant à l'intérieur du cercle

# Abaque de Smith

- Construction (diagramme d'impédance à x constante) :



## Abaque de Smith

COORDONNÉES EN IMPÉDANCE OU ADMITTANCE NORMALISÉES

