

$$\underline{HR} = \sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \quad (7)$$

q/m

$$\sqrt{x} - f_{n+1}(x) = \sqrt{x} - f_n(x) - \frac{1}{2} (\sqrt{x} - f_n(x))^2$$

$$\rightarrow = \sqrt{x} - f_n(x) - \frac{1}{2} (\sqrt{x} - f_n(x)) (\sqrt{x} + f_n(x))$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$= \underbrace{(\sqrt{x} - f_n(x))}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{1}{2} f_n(x)\right)}_{\leq 0}$$

$\leq 1 - \frac{1}{2} \sqrt{x}$

$$\leq (\sqrt{x} - f_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$\rightarrow \leq \sqrt{x} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1}$$

HR

Par réc.

$$\boxed{\sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n} \text{ pour tout } n.$$