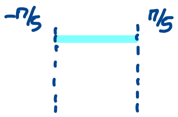


$g(x) = s(x) \times f(x)$

avec $s(x) = \theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 0,5

et

$f(x) = V_m + A\cos(\omega x + \varphi)$

avec $V_m = -1$ et $A = 3.$ 0,5

Par ailleurs $T = \frac{2\pi}{5}$

$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2\pi} 5 = 5$ 0,5

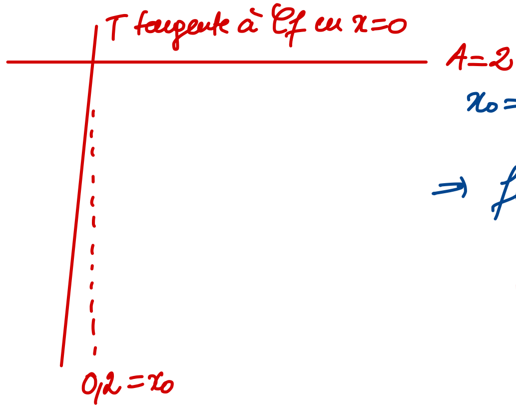
Enfin, f est max en $\pi/5 \Leftrightarrow \cos\left(5\cdot\frac{\pi}{5} + \varphi\right) = 1$

$\Rightarrow \pi + \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = -\pi.$ 0,5

$\Rightarrow f(x) = -1 + 3\cos(5x - \pi)$

NB: Avec le sinus : $\sin\left(\frac{5\pi}{5} + \varphi\right) = 1$

$\Leftrightarrow \pi + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}.$



$x_0 = 0{,}2 \Rightarrow \alpha = 1/0{,}2 = 5.$

$\Rightarrow f(x) = 2\left(1 - e^{-5x}\right).$

0,5 + 1,0

h est continue en 1

discontinue en 3

non-dérivable en 1

et non dérivable en 3.

4 × 0,5

$g(0) = e^0 = 1$

0,5 + 0,5

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{0^-} x^2+x+1 = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{0} g(x) = 1 = g(0)$ donc g est continue en 0.

0,5

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = ?$ L'expression diffère à gauche et à droite de 0.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{0^+} \frac{e^x}{1} = 1$ 0,5

Règle de L'Hospital

$\lim\limits_{0^-} \frac{x^2+x+1-1}{x-0} = \lim\limits_{0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim\limits_{0} x+1 = 1.$ 0,5

$\Rightarrow \lim\limits_{0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1 = g'(0) \Leftrightarrow g$ est dérivable en 0.

f n'est pas définie en $x=2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4}$ est une F.I. de type "$\frac{0}{0}$".

$\ln(x-1) \to 0$, $(x-1) \to 1$, $x^2-4 \to 0$

Règle de l'Hospital: $\lim\limits_{2} f(x) = \lim\limits_{2} \frac{\frac{1}{x-1}}{2x} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{x-1} \to 1$, $2x \to 4$

1pt

$\Rightarrow$ On prolonge f en 2 par $\tilde{f}$ avec:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4} & \text{si } x \neq 2 \\ 1/4 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

0,5

- / 2

$D_{\arccos} = [-1;1]$.

0,5

$-1 \leq x^2-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2 \Leftrightarrow x^2-2 \leq 0$

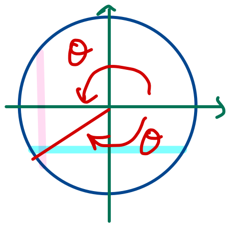
$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$D_h = [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

0,5

$h'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

0,5



$\theta = -5\pi/6 = \frac{7\pi}{6}.$

$\theta = -150° = 210°$

1

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x / x^2-x-6 \neq 0\}$ $\quad x^2-x-6 \overset{éq.}{=} 0 \quad \Delta = 1+24 = 25 = 5^2$

$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2;3\} =]-\infty;-2[\cup]-2;3[\cup]3;+\infty[$

$* \lim\limits_{-2} f(x) = \lim\limits_{-2} \frac{2x^3+x^2+1 \;\to -3}{x^2-x-6 \;\to 0}$

$\lim\limits_{-2^-} f(x) = \lim \frac{2x^3+x^2+1 \;\to -3}{x^2-x-6 \;\to 0^+ \text{ (extérieur des racines)}} = -\infty.$

1

$\lim\limits_{-2^+} f(x) = +\infty$ (intérieur des racines de x^2-x-6)

$\Rightarrow D_1 : x=-2$ est A.V. à C_f.

$\lim\limits_{3} f(x)$ se découpe aussi en 2 parties:

$\lim\limits_{3^-} f(x) = \lim\limits_{3^-} \frac{2x^3+x^2+1 \;\to 64}{x^2-x-6 \;\to 0^+ \text{ (intérieur des racines)}} = +\infty.$

1

$\lim\limits_{3^-} f(x) = -\infty \Rightarrow D_2 : x=3$ est A.V à C_f.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{2x^3+x^2+1}{x^2-x-6} = \lim\limits_{+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{+\infty} 2x = +\infty.$

0,5

→ On recherche une A.O.

$* \; m = \lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{2x^3+\dots}{x^3+\dots} = 2 = m.$

0,5

$* \; p = \lim\limits_{+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{+\infty} \frac{2x^3+x^2+1-2x^3+2x^2+12x}{x^2-x-6}$

0,5

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{3x^2+12x+1}{x^2-x-6} = 3 = p.$

$\Rightarrow D_3 : y = 2x+3$ est A.O à C_f en $+\infty$.

L'étude est la même en $-\infty \Rightarrow D_3$ est aussi A.O en $-\infty$.

0,5

$$\lim_{+\infty} f(x)-mx-p = \lim_{+\infty} \frac{2x^3+x^2+1}{x^2-x-6} - 2x-3$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{2x^3}+\cancel{x^2}+1-\cancel{2x^3}+\cancel{2x^2}+12x-\cancel{3x^2}+3x+18}{x^2-x-6}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{15x+19}{x^2-x-6} = 0^+$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}_3$ en $+\infty$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$. 0,5

(0,5)

$\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} x+1-x^{1/2} = \lim_{+\infty} x = +\infty$. 0,5

→ Recherche d'Asymptote oblique :

$m = \lim_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x+1-\sqrt{x}}{x} = 1$. 0,5

$p = \lim_{+\infty} x+1-\sqrt{x}-x = \lim_{+\infty} 1-\sqrt{x} = -\infty$. 0,5

$\Rightarrow$ Il n'y a pas d'asymptote oblique, uniquement une direction asymptotique $y=x$ (car $m=1$). 0,5