Outils mathématiques S1 – DS de novembre 2022 – NOM : **Groupe :** **Note :**

*20 points, 90 minutes. Les parties sont indépendantes. Calculatrice collège et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Répondre **uniquement** sur ce sujet.*

Partie 1 : géométrie dans le plan – *5 points*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère :

- les points $A(-1;-4)$, $B(2;5)$ et $C(5;-1)$;
- les droites $\mathcal{D}_1 = \{M(x;y)\ /\ 3x+10y-20=0\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x;y)\ /\ y = 0{,}1x-2\}$.

1. Déterminer la nature du triangle ABC. *(1 pt)*

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

On remarque que $\vec{AC}\cdot\vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{BC}$

De plus $\|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\| = \sqrt{45} \Rightarrow AC = BC$

Ainsi ABC est isocèle et rectangle en C.

0,50 0,50

2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ unitaire, de même direction que $\vec{AC}$ mais de **sens opposé**. *(0,5 pt)*

$\vec{v} = k\vec{AC}$ avec $\|\vec{v}\| = 1$ et $k<0$

$\|\vec{v}\| = |k|\ \|\vec{AC}\| = |k|\sqrt{45} = 1 \Rightarrow |k| = \frac{1}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{15}$

$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{\sqrt{5}}{15}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Calculer les coordonnées du point I d'intersection entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. *(0,5 pt)*

$I(x;y)$ vérifie le système : $\begin{cases} 3x+10y = 20 \\ 0{,}1x - y = 2 \end{cases}$

Calculatrice : $I(10;-1)$

Résolution par addition : $\begin{cases} 3x+10y = 20 \\ x-10y = 20 \end{cases}$ $\quad 4x = 40$ $\quad \Rightarrow x = 10$ $\quad \Rightarrow y = 0{,}1x - 2 = -1.$

4. Donner une mesure de l'angle α entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ au signe près. *(1 pt)*

Soit $\vec{u_1}$ directeur de $\mathcal{D}_1$: $\vec{u_1} = (10;-3)$

Soit $\vec{u_2}$ directeur de $\mathcal{D}_2$: $\vec{u_2} = (10;1)$

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{\|\vec{u_1}\|\cdot\|\vec{u_2}\|} = \frac{97}{\sqrt{109}\sqrt{101}} = 0{,}924$ 0,50

$\alpha = \pm \arccos(0{,}924) = \pm 0{,}391\text{ rad} = \pm 22{,}4° = \alpha$ 0,50

5. Parmi les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, déterminer, en le justifiant par des calculs, de quelle droite le point C est le plus proche. *(1,5 pt)*

$d_1 = d(C;\mathcal{D}_1) = \frac{|\det(\vec{M_1C};\vec{u_1})|}{\|\vec{u_1}\|}$ avec $M_1 = (0;2)$ et $\vec{M_1C} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= \frac{\left\|\begin{matrix} 10 & 5 \\ -3 & -3 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{109}} = \frac{|-30+15|}{\sqrt{109}} \simeq 1{,}44 \simeq d_1$ 0,50

$d_2 = d(C;\mathcal{D}_2) = \frac{|\det(\vec{M_2C};\vec{u_2})|}{\|\vec{u_2}\|}$ avec $M_2 = (0;-2)$ et $\vec{M_2C} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{\left\|\begin{matrix} 5 & 10 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{101}} = \frac{|5-10|}{\sqrt{101}} = 0{,}498 \simeq d_2$ 0,50

$d_2 < d_1 \Rightarrow C$ est plus proche de $\mathcal{D}_2$ que de $\mathcal{D}_1$. 0,50

6. On place les masses $m_A = 4$ kg en A, $m_B = 3$ kg en B et $m_c = 1$ kg en C. Déterminer **l'abscisse** du barycentre G de ce système de masses. *(0,5 pt)*

$x_G = \frac{1}{8}(4x_A + 3x_B + 1x_C) = \frac{1}{8}(-4+6+5) = \frac{7}{8}$

Partie 2 : géométrie dans l'espace – *5 points*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère :

- les trois points $A(-2;4;1)$, $B(1;-3;-1)$ et $C(1;-2;-3)$;
- le plan P d'équation $x+2y+z-4=0$;
- la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}=(-2;2;1)$.

1. Déterminer l'équation du plan P' parallèle à P et contenant le point C. *(0,5 pt)*

$P' // P \Rightarrow \quad x+2y+z+d=0$

$C\in P' \Rightarrow \quad 1-4-3+d=0 \Rightarrow d=6$

$$\boxed{P':\ x+2y+z+6=0}$$

2. Calculer le volume du parallélépipède engendré par le trièdre $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\vec{u})$ et préciser l'orientation de ce trièdre. *(1 pt)*

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1+2\\-3-4\\-1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-7\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1+2\\-2-4\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\-4\end{pmatrix}$ $\quad$ 0,5

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\-7\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\-6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\6\\3\end{pmatrix}$ $\quad(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}16\\6\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=-17$

$\Rightarrow V = 17\,u_L^3$ et le trièdre est indirect. 0,5

3. Calculer la distance d entre le point C et le plan P et donner le résultat avec trois chiffres significatifs. *(1 pt)*

$d(C;P)=\dfrac{|\overrightarrow{MC}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ avec $M\in P$, on choisit $M(0;2;0)$ 0,5

$\overrightarrow{MC}=\begin{pmatrix}1-0\\-2-2\\-3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$

et $\vec{n}=(1;2;1)\Rightarrow\|\vec{n}\|=\sqrt{6}$

$$d(C;P)=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6}}=\frac{|1-8-3|}{\sqrt{6}}=\frac{10}{\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow d(C;P)\simeq 4{,}08\,u_L$

4. Déterminer les coordonnées du point D, contenu dans le même plan que les points A, B et C et ayant une abscisse nulle. *(1 pt)*

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}16\\6\\3\end{pmatrix}$ permet d'établir une équation du plan (ABC)

$\Rightarrow 16x+6y+3z+d=0$

De plus $A\in(ABC)\Rightarrow -32+24+3+d=0 \Rightarrow d=5$

$\Rightarrow (ABC):\ 16x+6y+3z+5=0$. 0,5

Pour D, il y a une infinité de possibilités : $6y+3z+5=0$

Par ex : $y=0$ et $z=-5/3$

$\Rightarrow D(0;0;-5/3)$ 0,5

5. Déterminer les coordonnées de $P\cap\mathcal{D}$, l'intersection entre le plan P et la droite $\mathcal{D}$. *(1,5 pt)*

Equations de $\mathcal{D}$: $\begin{cases}x=-2t-2\\y=2t+4\\z=t+1\end{cases}$ $\quad x+2y+z-4=0$ $\quad$ 0,5

$-2t-2+4t+8+t+1-4=0$

$3t+3=0 \iff t=-1$ 0,5

$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=2\\z=0\end{cases}$ $\quad P\cap\mathcal{D}$ a pour coordonnées $(0;2;0)$

0,5

Partie 3 : Nombres complexes – *5 points*

1. Exprimer le nombre complexe $z_1 = (-4+i)\cdot 2i - (3-3i)^2$ sous formes algébrique et exponentielle. *(1 pt)*

$z_1 = -8i - 2 - (9 - 18i - 9) = -8i - 2 + 18i = -2 + 10i$ 0,5

$|z_1| = \sqrt{104}$

$\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{10}{-2}\right) + \pi = 1{,}77 \text{ rad} = 101°$

$\Rightarrow z_1 = 2\sqrt{26}\, e^{i1{,}77}$ 0,5

2. Calculer z_2 avec $z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^4 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^4$. *(1 pt)*

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$

$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$ $\Rightarrow z_2 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^4 + \left(2e^{-i\pi/3}\right)^4$

$= 16e^{i4\pi/3} + 16e^{-i4\pi/3}$ 0,5

$= 2Re\left[16e^{i4\pi/3}\right] = 32\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 32\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow z_2 = -16.$ 0,5

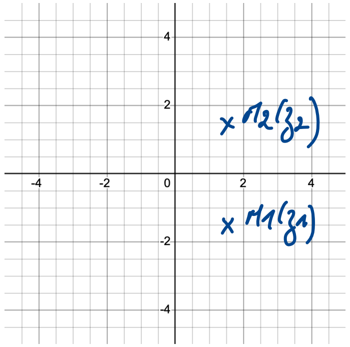
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 6z = -9$ et reporter les points ayant pour affixes ces solutions dans le repère ci-après. *(1 pt)*

On résout $2z^2 - 6z + 9 = 0$ $\Delta = 36 - 4\times 9\times 2 = -36 = (6i)^2$

$z_1 = \frac{6-6i}{4} = \frac{3}{2} - i\frac{3}{2}$

$z_2 = \frac{6+6i}{4} = \frac{3}{2} + i\frac{3}{2}$ 0,5

0,5



4. Soit $z = \sqrt{3} + i$. Déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquelles z^n est un réel. *(1 pt)*

$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$

z^n réel $\Leftrightarrow z^n$ a pour argument $0[\pi]$. 0,5

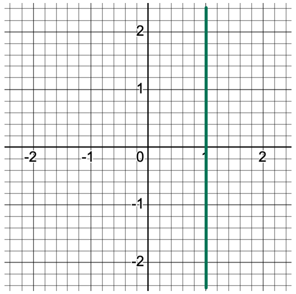
$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = 0[\pi] \Leftrightarrow n\pi = 0[6\pi]$

$n = 0[6]$

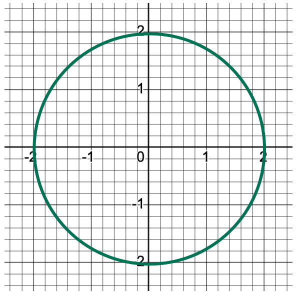
z^n est réel si n est un multiple de 6. 0,5

5. Dans les repères ci-dessous, représenter les ensembles de points ayant pour affixes les nombres z vérifiant les relations indiquées. *(1 pt)*

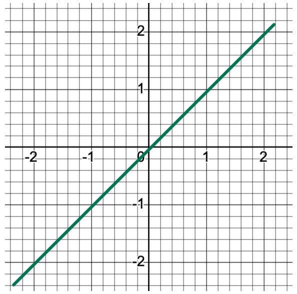
$z + \bar{z} = 2$



$z \cdot \bar{z} = 4$



$\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$



$z + \bar{z} = 2Re(z) = 2$

$\Rightarrow Re(z) = 1$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 4$

$\Rightarrow |z| = 2$

$z = x + iy$

$Re(z) = Im(z) \Leftrightarrow x = y$

$-0{,}5$pt par erreur

Partie 4 : Systèmes de coordonnées – *2 points*

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point A repéré en coordonnées polaires par $A(r = 4\,;\theta = 30^o)$ et le point B repéré en coordonnées cartésiennes par $B(x = 4\ ;y = -1)$.

   (a) Calculer les coordonnées polaires de B (angles en degrés ou radians). *(0,5 pt)*

   $r = \sqrt{5}$ $\theta = \arctan(-1/4) = -0{,}245\ \text{rad} = -14° = \theta$

   (b) Calculer les coordonnées cartésiennes de A. *(0,5 pt)*

   $x = 4\cos(30°) = 2\sqrt{3}$ $y = 4\sin(30°) = 4\times\frac{1}{2} = 2$

2. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère le point $C(2;-1;1)$ en coordonnées cartésiennes.

   (a) Calculer les coordonnées **cylindriques** de C. *(0,5 pt)*

   $z = 1$
   $\theta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -0{,}464\ \text{rad} = -26{,}6° = \theta$
   $r = \sqrt{5}$

   (b) Calculer les coordonnées **sphériques** de C. *(0,5 pt)*

   $\varphi = -0{,}464\ \text{rad} = -26{,}6° = \varphi$
   $r = \sqrt{6}$
   $\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 1{,}15\ \text{rad} = 65{,}9° = \theta$

Partie 5 : Fonctions – *3 points*

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f(x) = \ln\left(2x^2 + 3x - 5\right)$. *(1 pt)*

   $\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2+3x-5>0\}$ $\Delta = 9+40 = 49 = 7^2$

   $x_1 = \frac{-3-7}{4} = -\frac{5}{2}$ $x_2 = \frac{-3+7}{4} = 1$ 0,5

   Le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

   $\mathcal{D}f =]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup]1;+\infty[$ 0,5

2. Pour chacune des fonctions du tableau ci-dessous, indiquer les **éventuelles** périodicités et parités. Écrire *aucune* s'il n'y a en a pas. *(1 pt)* 0,1 par réponse.

Fonction	Période	Parité
$\tan(3x)$	$\pi/3$	impaire
$\sin^2(4x)$	$\pi/4$	paire
$\cos(3x)+\sin(6x)$	$\frac{2\pi}{3}$	aucune
$\frac{\cos(x)}{x^3+x}$	aucune	impaire
$\frac{2x+1}{x^3+1}$	[redacted]	aucune
$\sin\circ\exp(x)$	[redacted]	aucune

3. Déterminer les coodonnées du centre de symétrie S de la courbe C_h représentative de $h(x) = x^3 - 3x^2 - x + 2$. *(1 pt)*

   $h'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ $h''(x) = 6x - 6$ 0,5 pour x

   $h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow h(1) = -1$ 0,5 pour y.

   Le point d'inflexion $S(1;-1)$ est aussi le centre de symétrie de C_h.

   Variante : Moyenne des x annulant $h'(x)$.