Outils mathématiques 1 — TD 5 : Branches infinies

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.
   (a) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de f quand $x \to +\infty$, et étudier la position de C par rapport à D quand $x \to +\infty$;
   (b) puis déterminer l'équation de l'asymptote à C en $-\infty$.

2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2}{2x^2 - 5x + 3} \qquad f_2(x) = \frac{x^3 + x + 7}{2x^2 + 1} \qquad f_3(x) = x - \sqrt{2x} \qquad f_4(x) = \frac{x^2 + x\ln(x)}{x + 1}$$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x} + 2}{e^x - 2} \qquad f_6(x) = 2x - \cos x \qquad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \qquad f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1 - x}$$

3. Calculer les limites et déterminer les éventuelles asymptotes aux bornes de l'intervalle d'étude I de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x - 1}$; $I =]-\infty\,;\,1[$ (b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$; $I =]0\,;\,+\infty[$

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty\,;\,2[$ (d) $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; $I =]0\,;\,\pi[$ (f) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4\,;+\infty[$ (h) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

4. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.
   (a) Déterminer les ensembles de définition de f et g ;
   (b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.
   (c) Peut-on parler de branches infinies pour f et g quand $x \to 0$?

5. La fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ admet-elle une limite en zéro ?

1. Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

   (a) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de f quand $x \to +\infty$, et étudier la position de C par rapport à D quand $x \to +\infty$;

   (b) puis déterminer l'équation de l'asymptote à C en $-\infty$.

(a) $y = 2x$ est asymptote à $f \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) - y(x) = 0$

avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) - y(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = F\,I$

$\iff \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1} - x\right)\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)}{\sqrt{x^2-1} + x} = \left.\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x}\right|_{x \to +\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2-1}}$

$= 0^-$. La limite tend vers zéro ; tout en restant négative $\Rightarrow$ C est au dessous de D et $y = 2x$ est asymptote à C lorsque $x \to +\infty$

b) Lorsque $x \to -\infty$: $\lim_{x \to -\infty} f(x) - y(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = +\infty$

$\Rightarrow y = 2x$ n'est pas asymptote à C qd $x \to -\infty$

. On cherche $y = ax + b$ telle que $\left. f(x) - (ax+b)\right|_{x \to -\infty} = 0$. Mais on remarque que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est asymptote horizontale à C lorsque $x \to -\infty$

2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2}{2x^2 - 5x + 3} \qquad f_2(x) = \frac{x^3 + x + 7}{2x^2 + 1} \qquad f_3(x) = x - \sqrt{2x} \qquad f_4(x) = \frac{x^2 + x\ln(x)}{x + 1}$$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x} + 2}{e^x - 2} \qquad f_6(x) = 2x - \cos x \qquad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \qquad f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1 - x}$$

Branches infinies : Soit $M\binom{x}{y} \in \mathbb{R}$; alors f admet une branche infinie si $\overline{OM} \to \pm\infty$ + $x \to x_0$ ou $x \to \pm\infty$.

- $f_1(x) = \dfrac{2}{2x^2 - 5x + 3}$; $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{1 ; \frac{3}{2}\}$.

  ↳ A.V si $x \to 1$ ou $x \to \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
			$0^+ \mid 0^-$		$0^- \mid 0^+$		
$2x^2 - 5x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\lim\limits_{x \to 1^\pm} f_1(x) = \pm\infty \Rightarrow x = 1$ est A.V. à $f_1(x)$
- $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^\pm} f_1(x) = \pm\infty \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ est A.V. à $f_1(x)$

} voir tableau de signe

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_1(x) = \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ est A.H à C lorsque $x \to \pm\infty$.

- $f_2(x) = \dfrac{x^3 + x + 7}{2x^2 + 1}$; $D_{f_2} = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{2x^2} = +\infty$; il faut étudier $\dfrac{f_2(x)}{x}$

↳ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2} \rightsquigarrow \exists$ un A.O $\boxed{y = \frac{1}{2}x + b}$

↳ $b = \lim\limits_{+\infty} f_2(x) - \frac{1}{2}x = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-\frac{1}{2}x}{2x^2} \boxed{= 0 = b}$

↳ $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$ est asymptote oblique qd $x \to +\infty$

- $f_3(x) = x - \sqrt{2x}$; $D_f = \mathbb{R}_+$

  - $\lim\limits_{x \to 0} f_3(x) = 0 \Rightarrow$ pas d'asymptote.

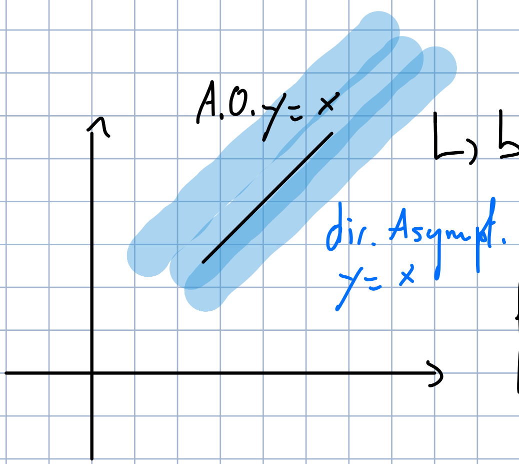
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x - \sqrt{2x})(x + \sqrt{2x})}{(x + \sqrt{2x})} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{x + \sqrt{2x}}$

    $= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x - 2}{1 + \sqrt{\frac{2}{x}}} = +\infty$; il faut étudier $\dfrac{f_3(x)}{x}$

    ↳ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_3(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \sqrt{\dfrac{2}{x}} = 1$

    ↳ $\exists$ un A.O $y = x + b$.

    ↳ $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{2x} = -\infty$



$f_3(x)$ admet une direction asymptotique d'équation $y = x$ qd $x \to +\infty$.

- $f_4(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x + 1}$; $D_f = \mathbb{R}_+^*$

  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f_4(x) = \lim\limits_{0^+} x \ln x = 0$ pas d'asymptote

Rappel : $\lim\limits_{0^+} x \ln x = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\cdot \lim_{+\infty} f_4(x) = \lim_{+\infty} (x + \ln(x)) = +\infty$; il faut étudier $\frac{f_4(x)}{x}$

$\hookrightarrow \lim_{+\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x^2 + x\ln x}{x^2 + x} = \lim_{+\infty} \frac{x + \ln x}{x+1} = 1$ $\left(\text{car } \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right)$

$\Longleftrightarrow$ $y = x + b$ est direction asymptotique

$\hookrightarrow b = \lim_{+\infty} f_4(x) - x = \lim_{+\infty} \frac{x^2 + x\ln x - x(x+1)}{x+1} = \lim_{+\infty} \frac{x(\ln x - x)}{x+1}$

$\to 1$

$\hookrightarrow +\infty$

$\Rightarrow b = +\infty$

Au final $\boxed{y = x}$ est direction asympt. à f_4 qd $x \to +\infty$

$\cdot f_5(x) = \frac{e^{2x} + 2}{e^x - 2}$; $\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$

$\cdot \lim_{x \to \ln(2)^+} f_5(x) = +\infty \Rightarrow x = \ln 2$ est asymptote verticale.

$\cdot \lim_{+\infty} f_5(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^{2x}}{e^x} \cdot \frac{1 + 2e^{-2x}}{1 - 2e^{-x}} = \lim_{+\infty} e^x = +\infty$

$\to 0$

$\hookrightarrow 0$

$\hookrightarrow \lim_{+\infty} \frac{f_5(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow$ Branche parabolique (Oy).

$\cdot \lim_{-\infty} f_5(x) = \lim_{-\infty} \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow y = -1$ est asymptote horizontale qd $x \to -\infty$

$\cdot f_6(x) = 2x - \cos(x)$; $\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R}$

$\to$ f_{ct} bornée $\to 0$

$\cdot \lim_{+\infty} f_6(x) = \lim_{+\infty} x\left(2 - \frac{\cos(x)}{x}\right) = \lim_{+\infty} 2x = +\infty$

$\hookrightarrow \lim_{+\infty} \frac{f_6(x)}{x} = \lim_{+\infty} 2 - \frac{\cos(x)}{x} = 2$; $y = 2x + b$ est direct° asympt.

$\hookrightarrow b = \lim\limits_{+\infty} (f_6(x) - 2x) = \lim\limits_{+\infty} (-\cos x) \in [-1;+1]$

$\hookrightarrow$ $\boxed{y = 2x}$ est direction asymptotique.

. $f_7(x) = 2^x - e^x$; $\mathcal{D}_{f_7} = \mathbb{R}$

a) On va utiliser le théorème des croissances comparées pour calculer

$\lim\limits_{+\infty} f_7(x) = \lim\limits_{+\infty} \left(e^{x\ln 2} - e^x\right)$

or $\ln(2) < \ln(e) = 1 \iff e^{x\ln(2)} < e^x$

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f_7(x) = \lim -e^x = -\infty$

$\hookrightarrow \lim\limits_{+\infty} \frac{f_7(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{-e^x}{x} = \infty \Rightarrow$ Branche parabolique (Oy)

b) $\lim\limits_{-\infty} f_7(x) = 0$; ("$1-1$").

$\Rightarrow \lim\limits_{-\infty} f_7(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est asymptote horizontale $x \to -\infty$

. $f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1-x}$; $\mathcal{D}_{f_8} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

. $\lim\limits_{1^{+}_{-}} f_8(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{1^{+}_{-}} \frac{\ln x + 1}{-1} = -1$ (Théorème de l'Hospital)

$\hookrightarrow$ pas d'asymptote.

. $\lim\limits_{0^+} f_8(x) = \lim\limits_{0^+} x\ln(x) = 0 \Rightarrow$ pas d'asymptote

. $\lim\limits_{+\infty} f_8(x) = \lim\limits_{+\infty} -\ln(x) = -\infty$

$\hookrightarrow \lim\limits_{+\infty} \frac{f_8(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ Branche parabolique (Ox).

3. Calculer les limites et déterminer les éventuelles asymptotes aux bornes de l'intervalle d'étude I de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$; $I =]-\infty\,;\,1[$ (b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$; $I =]0\,;\,+\infty[$

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty\,;\,2[$ (d) $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; $I =]0\,;\,\pi[$ (f) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4\,;+\infty[$ (h) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(a) $f_1(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ sur $I =]-\infty; 1[$

. $\lim\limits_{-\infty} f_1(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2 - x}\right) = \boxed{1 = m}$

$p = \lim\limits_{-\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{1}{x-1} = \boxed{0 = p}$

$\Rightarrow y = x$ est A.O à $f_1(x)$ qd $x \to -\infty$

. $\lim\limits_{x \to 1^-} f_1(x) = "1 - \infty" = -\infty \Rightarrow x = 1$ est A.V

b) $f_2(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

. $\lim\limits_{0^+} f_2(x) = "\dfrac{1}{0^+}" = +\infty$; $x = 0$ est A.V.

. $\lim\limits_{+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ est A.H

fction bornée $\in [-1; +1]$

c) $f_3(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty; 2[$

. $\lim\limits_{-\infty} f_3(x) = \lim\limits_{-\infty} -2x^3 = +\infty$ (terme de + haut degré).

$\hookrightarrow \lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-2x^3}{x} = -\infty \Rightarrow$ Branche parabolique (Oy)

$\cdot \lim_{2^-} f_3(x) = -16 - 10 + 7 = -19$

d) $f_5(x) = x\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$; sur $]1;+\infty[$

$\cdot \lim_{x \to 1^+} f_5(x) = \lim_{1^+} x = 1$

$\cdot \lim_{+\infty} f_5(x) = x\left(1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\right) = \lim_{+\infty} x = +\infty$

$\hookrightarrow \lim_{+\infty} \frac{f_5(x)}{x} = \lim_{+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \boxed{1 = m}$

$\hookrightarrow \lim_{+\infty} (f(x) - x) = \lim_{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \boxed{0 = p}$

$\Rightarrow$ $y = x$ est A.O. à $f_5(x)$ qd $x \to -\infty$

e) $f_6(x) = \frac{1}{\sin(x)}$; $I =]0;\pi[$

$\cdot \lim_{0^+} \sin(x) = 0^+$; $\lim_{\pi^-} \sin(x) = 0^+$

$\Rightarrow \lim_{0^+} f_6(x) = +\infty = \lim_{\pi^-} f_6(x) \Rightarrow$ $x = 0$ et $x = \pi$ sont A.V à $f_6(x)$

f) $g_1(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - x}$; $I =]1;+\infty[$

$\cdot \lim_{1^+} g_1(x) = \frac{e^1 - 2}{e^1 - 1} \approx 0.4$

$\hookrightarrow$ pas de B.P

$\cdot \lim_{+\infty} g_1(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \boxed{1 = m}$

$\Rightarrow$ $y = 1$ est A.H qd $x \to +\infty$

• g) $f_7(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4 ; +\infty[$

. "4" est racine de $P(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow \lim\limits_{4^+} P(x) = 0^+$ ⚠

$\Rightarrow \lim\limits_{4^+} f_7(x) = \dfrac{"0"}{"0"} = \lim\limits_{4^+} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x - 5} = \dfrac{1}{12}$

. $\lim\limits_{x \to +\infty} f_7(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} = 0$ (termes de + haut degré).

$\Rightarrow$ $y = 0$ est A.H qd $x \to +\infty$

h) $f_8(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$; $I =]1 ; +\infty[$

Hospital.

. $\lim\limits_{1^+} (1 - x^3) = 0^+ = \lim\limits_{1^+}(1 - x) \Rightarrow \lim\limits_{1^+} f_8(x) = \dfrac{"0"}{"0"} = \lim\limits_{1^+} \dfrac{-3x^2}{-1} = 3$

. $\lim\limits_{+\infty} f_8(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f_8(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = +\infty$; BP (Oy)

4. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

(a) Déterminer les ensembles de définition de f et g ;

(b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.

(c) Peut-on parler de branches infinies pour f et g quand $x \to 0$?

(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathcal{D}_g$.

(b) Branches infinies:

fct° bornée $\in [-1 ; +1]$

. $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ $\Rightarrow$ $y = 0$ est A.H lorsque $x \to \pm\infty$.

$\cdot \lim_{0^\pm} f(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{0^\pm} \cos x = 1$

$\cdot \lim_{\pm\infty} g(x) = \lim_{\pm\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{\pm\infty} \frac{-\cos(x)}{x^2} = 0$ (théorème d'encadrement)

$\cos(x) \in [-1;1]$

$\cdot \lim_{0} g(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$

c) Non car $\overline{\sigma n} \not\to \infty$ lorsque $x \to 0$; $\forall n \in \mathbb{R}$.

5. La fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ admet-elle une limite en zéro ?

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \begin{cases} \frac{-|x|}{x} & \text{si } x<0 \\ \frac{+|x|}{x} & \text{si } x>0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{0^+} f(x) = +1$$

$\Rightarrow$ f n'admet pas de limite en zéro