Outils mathématiques 1 — TD 4 : Nombres complexes

Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1 Représentation dans le plan

1.1 On considère les points M et M' de coordonnées respectives $\left(1\,;\,\sqrt{3}\right)$ et $\left(1\,;-\sqrt{3}\right)$:

(a) déterminer leurs affixes z et z' (sous forme algébrique) et faire le lien avec les coordonnées cartésiennes ;

(b) donner les expressions trigonométriques de z et z' et faire le lien avec les coordonnées polaires ;

(c) donner les expressions exponentielles de z et z'.

(d) Que constituent z et z' l'un pour l'autre ?

1.2 Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des points d'affixes z telles que :

$$\text{(a) } \mathrm{Re}(z) = -2 \;;\; \text{(b) } \mathrm{Im}(z) = 1 \;;\; \text{(c) } |z| = 4 \;;\; \text{(d) } |z| = -3 \;;\; \text{(e) } \arg(z) = \pi/4 \;;$$

$$\text{(f) } z \cdot \bar{z} = 4 \;;\; \text{(g) } z + \bar{z} = -4 \;;\; \text{(h) } z - \bar{z} = 8i \;;\; \text{(i) } z = \bar{z}.$$

1.3 Déterminer graphiquement le module et l'argument des nombres suivants et donner leurs expressions exponentielles :

$$z_1 = 1\,;\; z_2 = i\,;\; z_3 = -i\,;\; z_4 = 1 + i\,;\; z_5 = -1 - i\,;\; z_6 = -1 + i\,;$$

$$z_7 = \frac{+1 - i\sqrt{3}}{2}\,;\; z_8 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

2 Techniques de calcul

2.1 Calculer les nombres complexes suivants en donnant les résultats sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$z_1 = (1 - 2i)^2 - (2 + i)^2\,;\; z_2 = \frac{1 + 3i}{1 + 2i}\,;\; z_3 = i(3 + 4i) - (1 - 3i)(3 - i)$$

2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\text{(a) } z^2 = -9 \;;\; \text{(b) } z^2 + 3z + 4 = 0 \;;\; \text{(c) } z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$$

$$\text{(d) } z^4 = 1 \;;\; \text{(e) } z^3 = -1 \;;\; \text{(f) } z^4 = -16;\; \text{(g) } z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$$

2.3 Calculer les nombres complexes suivants :

$$(a)\; z_1 = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6 \;;\; (b)\; z_2 = (5 + 3i)^7 \;;\; (c)\; z_3 = \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i};\; (d)\; z_4 = \frac{(1 - i)^2}{(\sqrt{3} + i)^3} \;;\; (e)\; z_5 = \frac{4 + 6i}{1 - 5i}$$

3 Trigonométrie

3.1 À l'aide des formes exponentielles des nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 1 + i$, déterminer les valeurs **exactes** de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

3.2 À l'aide des nombres complexes :

(a) déterminer les expressions de $\cos(a + b)$ et $\sin(a - b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$;

(b) puis calculer précisément les valeurs de $\cos(\pi/4 + \pi/3)$ et $\sin(\pi/4 - \pi/3)$.

Application des nombres complexes en électricité (à revoir en fin de S1)

Nous avons travaillé dans le TD1 sur la représentation vectorielle des tensions alternatives sinusoïdales en électricité. Avec une approche similaire, on peut représenter ces tensions (ainsi que les courants) avec des nombres complexes qui constituent les affixes de ces vecteurs. Comme en électricité, nous notons dans cette application les grandeurs complexes avec une barre en-dessous, et j le nombre imaginaire.

Si un courant de valeur efficace I traverse une résistance R, une capacité C et une inductance L, on observe :
— une tension aux bornes de R en phase avec le courant, et de valeur efficace $U_R = RI$;
— une tension aux bornes de C avec un retard de phase de 90 degrés (déphasage négatif) sur le courant et de valeur efficace $U_C = \frac{I}{C\omega}$, où la pulsation ω est liée à la fréquence au travers de la relation $\omega = 2\pi f$;
— une tension aux bornes de L avec une avance de phase de 90 degrés (déphasage positif) sur le courant et de valeur efficace $U_L = L\omega I$.

3.1 Nous allons définir les impédances des récepteurs R, L et C. Nous les notons $\underline{Z}$: elles permettent de généraliser la loi d'Ohm (vue en continu dans le cas des résistances) à ces trois récepteurs en régime alternatif sinusoïdal.

(a) Tracer sur l'axe des abscisses le vecteur $\vec{I}$ correspondant au courant traversant les récepteurs, de valeur efficace I.

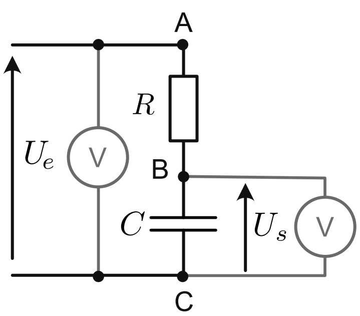
(b) Tracer dans le plan les vecteurs représentant les trois tensions observées $\vec{U}_R$, $\vec{U}_L$ et $\vec{U}_C$. On rappelle que la norme du vecteur correspond à la valeur efficace mesurée, et la coordonnée angulaire du vecteur correspond au déphasage.

(c) Donner les affixes du vecteur de courant et des vecteurs de tension sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

(d) Ces affixes sont appelées les *phaseurs* de courant et de tension : sur quelles grandeurs mesurables mesurables nous renseignent le module et de l'argument d'un phaseur ?

(e) Déterminer les impédances $\underline{Z}$ des trois récepteurs, définies par le rapport entre le phaseur de tension et le phaseur de courant, $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$. Déterminer les impédances des trois récepteurs.

3.2 Considérons à présent le circuit représenté sur la figure ci-dessous.



On écrit la fonction de transfert en exprimant le rapport entre les phaseurs de la tension de sortie $\underline{U}_s$ et de la tension d'entrée $\underline{U}_e$. Ici, celle-ci s'établit au travers du pont diviseur

$$H(\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}$$

(a) Exprimer $H(\omega)$ sous forme algébrique.

(b) Exprimer le module de $H(\omega)$ et tracer succinctement $|H|$ en fonction de ω. Quelle information fournit cette grandeur ?

(c) Exprimer l'argument de $H(\omega)$ et tracer succinctement $\arg(H)$ en fonction de ω. Quelle information fournit cette grandeur ?

(d) Ce circuit est un filtre : pourquoi peut-on le qualifier de passe-bas ?

1 Représentation dans le plan

1.1 On considère les points M et M' de coordonnées respectives $\left(1\,;\,\sqrt{3}\right)$ et $\left(1\,;-\sqrt{3}\right)$:

(a) déterminer leurs affixes z et z' (sous forme algébrique) et faire le lien avec les coordonnées cartésiennes ;

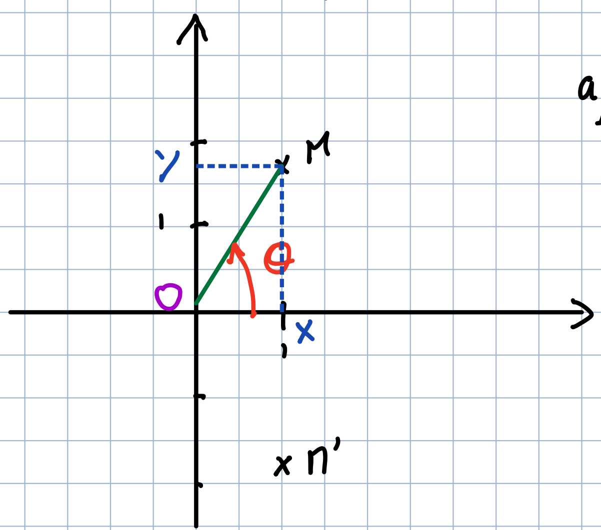
(b) donner les expressions trigonométriques de z et z' et faire le lien avec les coordonnées polaires ;

(c) donner les expressions exponentielles de z et z'.

(d) Que constituent z et z' l'un pour l'autre ?

<u>Ex 1 :</u>

<u>1.1 Soient les points :</u>



a) $\vec{OM}$: $z = 1 + j\sqrt{3}$; $\vec{OM'}$: $z' = 1 - j\sqrt{3}$

$\begin{cases} a = x \ ; \ a' = x' \\ b = y \ ; \ b' = y' \end{cases}$ $\boxed{z = x + jy}$

b) Expressions trigonométriques.

$\boxed{z = r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)}$ $\quad r = |OM| = \sqrt{3^2+1^2} = 2$

distance OM $\quad$ angle / (Ox)

On cherche θ ? $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$

<u>Par conséquent</u> : $\boxed{z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

$z' = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \boxed{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = z'}$

lien avec les polaires : $(r\,;\,\theta)$

angle

distance

c) Expressions exponentielles : $z = r\exp(j\theta) = re^{j\theta}$

Alors $z = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$ et $z' = 2e^{-j\frac{\pi}{3}}$

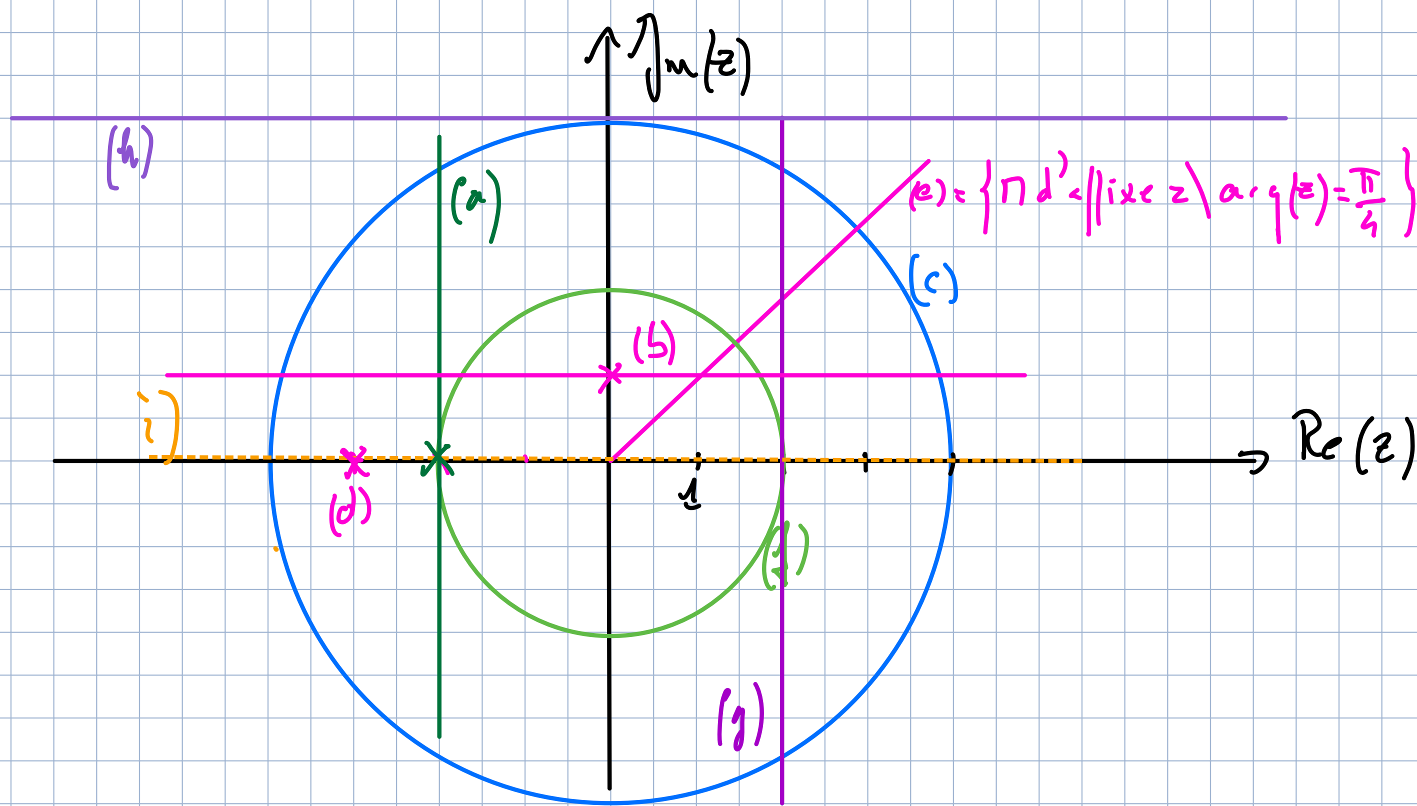
d) z et z' sont complexes conjugués i.e. ils sont symétriques par rapport (Ox).

1.2 Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des points d'affixes z telles que :

$z = -3$ sinon $S = \emptyset$

(a) $\mathrm{Re}(z) = -2$; (b) $\mathrm{Im}(z) = 1$; (c) $|z| = 4$; (d) $|z| = -3$; (e) $\arg(z) = \pi/4$;

(f) $z \cdot \bar{z} = 4$; (g) $z + \bar{z} = +4$; (h) $z - \bar{z} = 8i$; (i) $z = \bar{z}$.



c) Si $z = a + ib$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $|z| = 4 \iff a^2 + b^2 = 16$

$\Rightarrow$ cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 4.

d) $z = -3 = 3 \cdot -1 = 3e^{i\pi[2\pi]}$ $\to |z| = 3$

$\hookrightarrow \mathrm{Arg}(z) = \pi$

f) $z\bar{z} = 4 \Rightarrow (a+ib)(a-ib) = (a^2 - b^2) = 4 = |z|^2$ car $z\bar{z} = |z|^2$

$\Rightarrow$ cercle centre O et de rayon 2.

g) $z + \bar{z} = 4 \Leftrightarrow (a+ib)+(a-ib) = 2a = 4 \Rightarrow a = 2\ \forall b \in \mathbb{R}$.

h) $z - \bar{z} = 8i \Leftrightarrow (a+ib)-(a-ib) = 2ib = 8i \Leftrightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4\ \forall a \in \mathbb{R}$

i) $z = \bar{z} \Leftrightarrow a+ib = a-ib \Leftrightarrow b = 0\ \forall a \in \mathbb{R}$

1.3 Déterminer graphiquement le module et l'argument des nombres suivants et donner leurs expressions exponentielles :

$$z_1 = 1\,;\ z_2 = i\,;\ z_3 = -i\,;\ z_4 = 1+i\,;\ z_5 = -1-i\,;\ z_6 = -1+i\,;$$

$$z_7 = \frac{+1 - i\sqrt{3}}{2}\,;\ z_8 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

- $z_1 : \begin{cases} |z_1| = 1 \\ \theta_1 = 0[2\pi] \end{cases}$; $z_1 = 1$
- $z_2 = i = e^{i\pi/2}$
- $z_3 = -i = e^{-i\pi/2}$
- $z_4 = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $z_5 = -1-i = \sqrt{2}\, e^{5i\frac{\pi}{4}}$
- $z_6 = -1+i = \sqrt{2}\, e^{3i\frac{\pi}{4}}$
- $z_7 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
- $z_8 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

2 Techniques de calcul

2.1 Calculer les nombres complexes suivants en donnant les résultats sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 \; ; \; z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} \; ; \; z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i)$$

- $z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 = -(3+4i) - (3+4i) = -6-8i = z_1 = 10e^{i(4{,}07)}$

Rque : $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$

- $z_2 = \dfrac{1+3i}{1+2i} \cdot \dfrac{1-2i}{1-2i} = \dfrac{(1-2i)+(3i+6)}{1-(2i)^2} = \dfrac{7+i}{5} = z_2 = \sqrt{2}e^{i(0{,}142)}$

Rque : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

- $z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i) = 3i - 4 - (\cancel{3} - i - 9i - \cancel{3})$
$= 3i - 4 + 10i = 13i - 4 = z_3 = \sqrt{185}\,e^{1{,}87i}$

2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2 = -9$; (b) $z^2 + 3z + 4 = 0$; (c) $z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$

(d) $z^4 = 1$; (e) $z^3 = -1$; (f) $z^4 = -16$; (g) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$

(a) $z^2 = -9 = 9i^2 \Rightarrow \sqrt{|\Delta|} = \pm 3i$ - donne $\boxed{z_1 = 3i \text{ et } z_2 = -3i}$

(b) $z^2 + 3z + 4 = 0$; $\Delta = -7$ donne $\boxed{z_1 = \dfrac{-3+i\sqrt{7}}{2}}$; $\boxed{z_2 = \dfrac{-3-i\sqrt{7}}{2}}$

(c) $z^2 + 2\sqrt{3}.z + 4 = 0$; $\Delta = -2^2$ donne $\boxed{z_1 = -\sqrt{3} - i}$; $\boxed{z_2 = -\sqrt{3} + i}$

(d) $z^4 = 1 = e^{0i\,[2\pi]} \Rightarrow z = 1^{\frac{1}{4}}\, e^{\frac{0i[2\pi]}{4}}$ On sort 4 solutions

$z_1 = 1.e^0 = 1$; $z_2 = 1.e^{\frac{2i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{2}} =$; $z_3 = e^{\frac{4i\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1$

$z_4 = e^{\frac{6i\pi}{4}} = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$

Au final : $\boxed{S = \{1 ; i ; -1 ; -i\}}$

(e) $z^3 = -1 = e^{i\pi[2\pi]} \Rightarrow z = e^{\frac{i\pi[2\pi]}{3}}$

je cherche les 3 premières solutions

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = e^{\frac{3i\pi}{3}} = -1$; $z_3 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Au final : $\boxed{S = \left\{e^{\frac{i\pi}{3}} ; -1 ; e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}}$

(f) $z^4 = -16 = 16e^{i\pi[2\pi]} \Rightarrow z = 16^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi[2\pi]}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]}$

Au final : $\boxed{S = \{\sqrt{2}(1+i) ; \sqrt{2}(-1+i) ; \sqrt{2}(-1-i) ; \sqrt{2}(1-i)\}}$

(g) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}[2\pi]} \Rightarrow z = 4^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\pi}{18}[\frac{2\pi}{3}]}$

$\boxed{S = \left\{\sqrt[3]{4}\, e^{-i\frac{\pi}{18}} ; \sqrt[3]{4}\, e^{+i\frac{11\pi}{18}} ; \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{23\pi}{18}}\right\}}$

2.3 Calculer les nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$; (b) $z_2 = (5+3i)^7$; (c) $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$; (d) $z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}$; (e) $z_5 = \frac{4+6i}{1-5i}$

a) $z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = e^{-i2\pi} = 1 = z_1$

b) $z_2 = (5+3i)^7$; $|z_2| = (25+9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{34}$; $\theta_2 = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 0,54 \text{ rad}$
$\approx 31°$

$= \left(\sqrt{34}\, e^{i\,0,54}\right)^7 = 34^{7/2}\, e^{i\,3,78} = z_2$

c) $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\,\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{4} = \frac{(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{4} + i\frac{(\sqrt{3}+1)}{4}$

d) $z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}$ avec $1-i = \frac{2}{\sqrt{2}}\, e^{-i\pi/4}$ et $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$

$\Rightarrow z_4 = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{\left(2\, e^{i\pi/6}\right)^3} = \frac{2\, e^{-i\frac{\pi}{2}}}{8\, e^{i\pi/2}} = \frac{1}{4}\, e^{-2i\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} = z_4$

3 Trigonométrie

3.1 À l'aide des formes exponentielles des nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 1 + i$, déterminer les valeurs **exactes** de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

3.2 À l'aide des nombres complexes :

(a) déterminer les expressions de $\cos(a + b)$ et $\sin(a - b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$;

(b) puis calculer précisément les valeurs de $\cos(\pi/4 + \pi/3)$ et $\sin(\pi/4 - \pi/3)$.

3.1 : $z = \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z' = 1+i = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

or $\begin{cases} \cdot \arg(zz') = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi+3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \\ \cdot \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi-2\pi}{12} = +\frac{\pi}{12} \end{cases}$

Calculons alors zz' et $\frac{z'}{z}$

$$\bullet\ zz' = 2e^{i\pi/4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\pi/6} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{\frac{5\pi}{12}} = 2\sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{12}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$= (\sqrt{3}+i)(1+i) = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$$

<u>Ainsi</u> $\cdot \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$\bullet\ \frac{z'}{z} = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\pi/6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

<u>Ainsi</u> : $\cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

<u>3.2</u> : $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$

$$= e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a)) \cdot (\cos(b) + i\sin(b))$$

$$= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))$$

On identifie $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$:

$$\boxed{\begin{cases} \cdot \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \\ \cdot \quad \sin(a+b) = \left(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\right) \end{cases}}$$

La même méthode par $(a-b)$ donne :

$$\boxed{\begin{cases} \cdot \quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \\ \cdot \quad \sin(a-b) = \left(\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)\right) \end{cases}}$$

Ainsi : $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$$

3.1 Nous allons définir les impédances des récepteurs R, L et C. Nous les notons $\underline{Z}$: elles permettent de généraliser la loi d'Ohm (vue en continu dans le cas des résistances) à ces trois récepteurs en régime alternatif sinusoïdal.

(a) Tracer sur l'axe des abscisses le vecteur $\vec{I}$ correspondant au courant traversant les récepteurs, de valeur efficace I.

(b) Tracer dans le plan les vecteurs représentant les trois tensions observées $\vec{U}_R$, $\vec{U}_L$ et $\vec{U}_C$. On rappelle que la norme du vecteur correspond à la valeur efficace mesurée, et la coordonnée angulaire du vecteur correspond au déphasage.

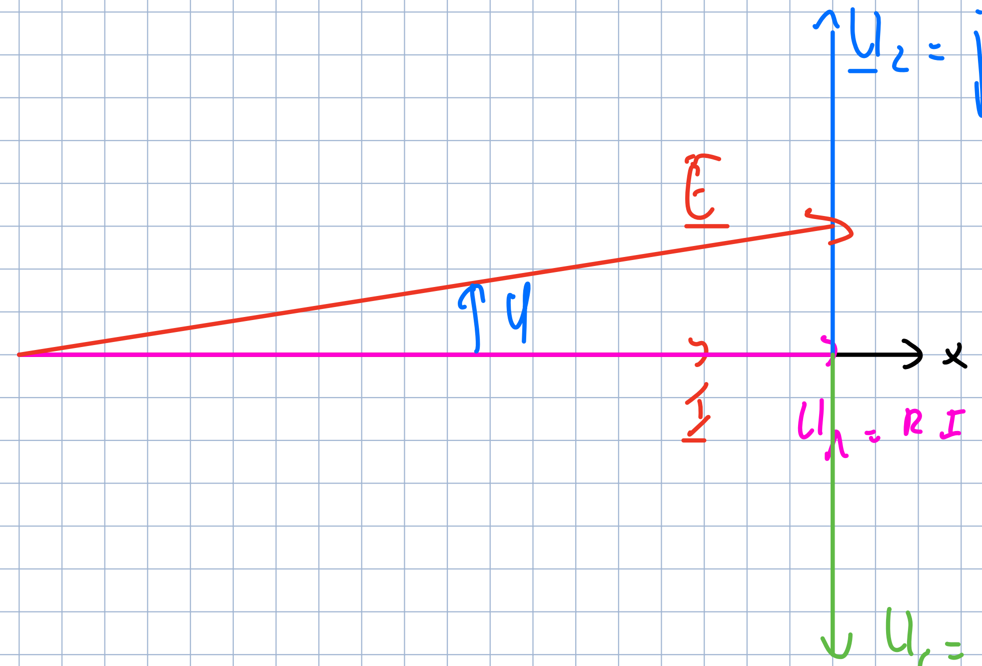
(c) Donner les affixes du vecteur de courant et des vecteurs de tension sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

(d) Ces affixes sont appelées les *phaseurs* de courant et de tension : sur quelles grandeurs mesurables mesurables nous renseignent le module et de l'argument d'un phaseur ?

(e) Déterminer les impédances $\underline{Z}$ des trois récepteurs, définies par le rapport entre le phaseur de tension et le phaseur de courant, $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$. Déterminer les impédances des trois récepteurs.

(a) → (d) Représentation de Fresnel :

$\underline{U}_L = jL\omega \underline{I} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{I}$



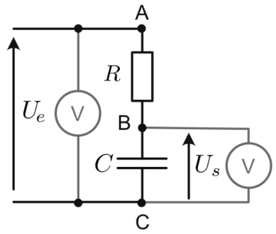
$U_C = \frac{-j}{C\omega} \underline{I}$

$= \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{I}$

(e) Au final : $\underline{Z}_L = jL\omega$; $\underline{Z}_R = Z_e = R$

$\underline{Z}_C = \frac{-j}{C\omega}$

3.2 Considérons à présent le circuit représenté sur la figure ci-dessous.



On écrit la fonction de transfert en exprimant le rapport entre les phaseurs de la tension de sortie $\underline{U}_s$ et de la tension d'entrée $\underline{U}_e$. Ici, celle-ci s'établit au travers du pont diviseur

$$H(\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}$$

(a) Exprimer $H(\omega)$ sous forme algébrique.

(b) Exprimer le module de $H(\omega)$ et tracer succinctement $|H|$ en fonction de ω. Quelle information fournit cette grandeur ?

(c) Exprimer l'argument de $H(\omega)$ et tracer succinctement $\arg(H)$ en fonction de ω. Quelle information fournit cette grandeur ?

(d) Ce circuit est un filtre : pourquoi peut-on le qualifier de passe-bas ?

(a)

$$H(\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C}} \quad \text{or} \quad \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega}} = jRC\omega$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

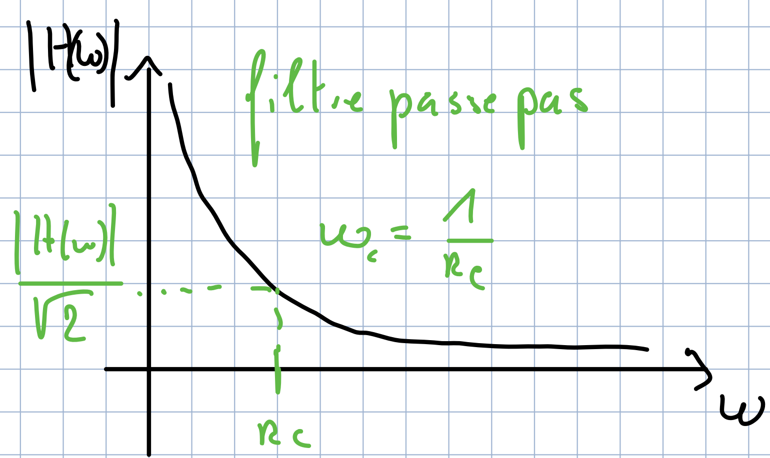
donne que $H(\omega) = \frac{1 - jRC\omega}{1 + (RC\omega)^2} \Rightarrow |H(\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{1 + (RC\omega)^2}$

De la forme $\frac{\sqrt{A}}{A} = \frac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

(b)

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$



(c) $\operatorname{Arg}(H(\omega)) = -\operatorname{Arg}(1+jRC\omega) = -\operatorname{Arctan}(RC\omega)$