Outils mathématiques 1 — TD 3 : Systèmes de coordonnées de l'espace

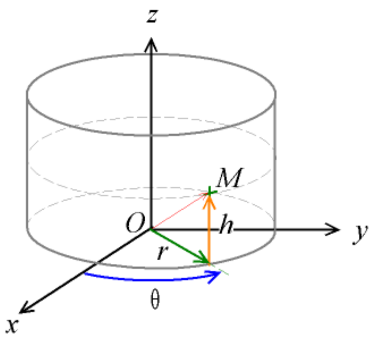


Fig. 1. Coordonnées cylindriques

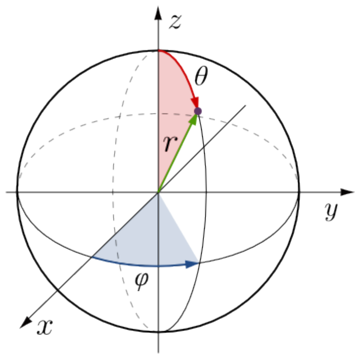


Fig. 2. Coordonnées sphériques

Systèmes de coordonnées dans l'espace

1. Déterminer les formules de passage :
   — entre coordonnées cartésiennes et cylindriques ;
   — entre coordonnées cartésiennes et sphériques.

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, calculer les coordonnées **sphériques**, puis **cylindriques**, des sommets du cube de côté 1 et dont les vecteurs du repère forment trois arêtes.

3. Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, donner les coordonnées **sphériques** et **cylindriques** des points A, B, C, D dont les coordonnées **cartésiennes** sont : $A(1\,;0\,;2)$, $B(2\,;2\,;2)$, $C(-1\,;5\,;0)$ et $D(0\,;3\,;-1)$.

4. Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, calculer les coordonnées **cartésiennes** :
   (a) du point A dont les coordonnées **sphériques** sont : $r = 3$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$;
   (b) du point B dont les coordonnées **cylindriques** sont : $r = 2$, $\theta = 5\pi/4$, $z = 1$.

5. En coordonnées **cylindriques**, l'ensemble des points tels que $r =$constante est :
   (A) un cercle ; (B) un cylindre ; (C) une sphère

6. En coordonnées **sphériques**, l'ensemble des points tels que $\theta =$constante est :
   (A) un cercle passant par les pôles ; (B) un disque horizontal ; (C) un cône d'axe (Oz)

1. Déterminer les formules de passage :
   — entre coordonnées cartésiennes et cylindriques ;
   — entre coordonnées cartésiennes et sphériques.

Cartésiennes $\Leftrightarrow$ Cylindriques

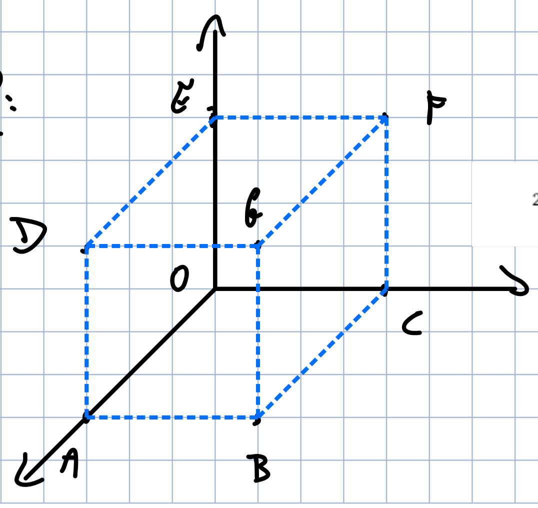
- $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$
- $r^2 = \sqrt{x^2+y^2}$
- $\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) [2\pi] & \text{si } x>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \ [2\pi] & \text{si } x<0 \end{cases}$

Cartésiennes $\Leftrightarrow$ Sphériques

φ = longitude $\in [0; 2\pi]$; θ = co-latitude $\in [0; \pi]$

- $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$
- $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- $\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) [2\pi] & \text{si } x>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \ [2\pi] & \text{si } x<0 \end{cases}$
- $\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$

Ex 2 :



2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, calculer les coordonnées **sphériques**, puis **cylindriques**, des sommets du cube de côté 1 et dont les vecteurs du repère forment trois arêtes.

Point	Cartésiennes $(x;y;z)$	Cylindriques $(r;\theta;z)$	Sphériques $(r;\theta;\varphi)$
A	$(1;0;0)$	$(1;0;0)$	$(1;\frac{\pi}{2};0)$
B	$(1;1;0)$	$(\sqrt{2};\frac{\pi}{4};0)$	$(\sqrt{2};\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4})$
C	$(0;1;0)$	$(1;\frac{\pi}{2};0)$	$(1;\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$
D	$(1;0;1)$	$(1;0;1)$	$(\sqrt{2};\frac{\pi}{4};0)$
E	$(0;0;1)$	$(0;0;1)$	$(1;0;0)$
F	$(0;1;1)$	$(1;\frac{\pi}{2};1)$	$(\sqrt{2};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$
G	$(1;1;1)$	$(\sqrt{2};\frac{\pi}{4};1)$	$(\sqrt{3};0{,}955;\frac{\pi}{4})$
O	$(0;0;0)$	$(0;0;0)$	$(0;0;0)$

3. Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, donner les coordonnées **sphériques** et **cylindriques** des points A, B, C, D dont les coordonnées **cartésiennes** sont : $A(1\,;0\,;2)$, $B(2\,;2\,;2)$, $C(-1\,;5\,;0)$ et $D(0\,;3\,;-1)$.

Exo 3 : $A(1;0;2)$

→ Sphériques : $\varphi=0\ (x>0)$; $r=\sqrt{5}$; $\theta=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=26{,}6°=0{,}464$

→ Cylindriques : $r=1$; $\theta=\arctan\left(\frac{0}{1}\right)=0$; $z=2$

$B(2;2;2)$

→ Sphériques : $r=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$; $\theta=\arctan(\sqrt{2})=0{,}955\text{ rad}=54{,}7°$

$\varphi=\frac{\pi}{4}$

→ Cylindriques : $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $\theta=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$; $z=2$

$C(-1;5;0)$

→ Cylindriques : $r=\sqrt{26}$; $\theta=\arctan(-5)+\pi=1{,}77\text{ rad}=101{,}3°$; $z=0$

→ Sphériques : $r=\sqrt{26}$; $\theta=\arctan(\infty)=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$; $\varphi=1{,}77$ rad $=101{,}3°$

D $(0;3;-1)$

→ Cylindriques : $r=\sqrt{9}=3$; $\theta=\arctan(\infty^+)=\frac{\pi}{2}$; $z=-1$

→ Sphériques : $r=\sqrt{10}$; $\theta=\arctan(-3)+\pi=\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)=108°=1{,}89$ rad

$\varphi=\pi/2$

Exo 4 : a) Sphériques ⟶ Cartésiennes

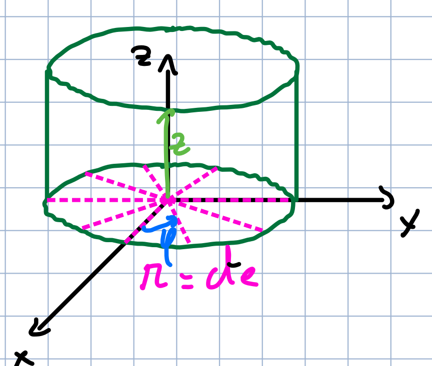
$\left(3;\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow \begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}=x \\ y=r\sin\theta\sin\varphi=3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}=y \\ z=r\cos\theta=\frac{3}{2}=z \end{cases}$

b) Cylindriques ⟶ Cartesiennes

$\left(2;\frac{5\pi}{4};1\right) \longrightarrow \begin{cases} x=r\cos\theta=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}=x \\ y=r\sin\theta=x=-\sqrt{2}=y \\ z=z=1 \end{cases}$

5. En coordonnées **cylindriques**, l'ensemble des points tels que r =constante est :
(A) un cercle ; (B) un cylindre ; (C) une sphère

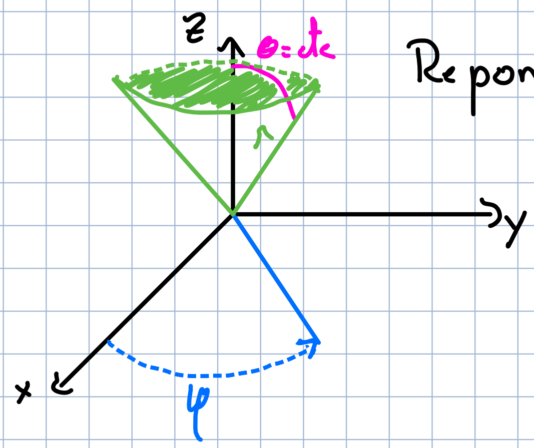
5)



Réponse b) : un cylindre.

6. En coordonnées **sphériques**, l'ensemble des points tels que θ =constante est :
(A) un cercle passant par les pôles ; (B) un disque horizontal ; (C) un cône d'axe (Oz)

6)



Réponse c) : un cône d'axe (Oz).