# Théorie des Jeux

## Master 1 Economie

**Mickael Beaud**
Maître de Conférences des Universités
Faculté d'Economie de l'Université de Montpellier
CEE-M (UMR: UM-CNRS-INRAE-MontpSupAgro)

Courriel: mickael.beaud@umontpellier.fr

# Partie 1: Jeux statiques

- **Jeux sous forme stratégique et dominance**
- Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées
- Equilibre de Nash
- Stratégies mixtes
- Jeux à somme nulle

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Un jeu sous forme stratégique (ou normale) est un modèle constitué de trois éléments:

1. L'ensemble fini des joueurs $\mathbf{N}=\{1,2,\ldots,j,\ldots,J\}$, où J est le nombre total de joueurs.
2. Pour chaque joueur j, l'ensemble des actions possibles $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$. On notera: $a_j \in \mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ une action du joueur j, $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,\ldots,a_j,\ldots,a_J\}$ une issue du jeu et $\mathbf{A}=\Pi_{j\in N}\,\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ l'ensemble des issues possibles.
3. Pour chaque joueur j, une fonction de paiement, ou fonction d'utilité Von Neumann-Morgenstern, $u_j(\mathbf{a})$ caractérisant ses préférences sur toutes les issues possibles du jeu.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Exemple avec deux joueurs et deux stratégies par joueur.

1. L'ensemble des joueurs est $\mathbf{N}=\{1,2\}$.
2. L'ensemble des stratégies possibles est $\mathbf{A}_1=\{H,B\}$ pour le joueur 1, et $\mathbf{A}_2=\{G,D\}$ pour le joueur 2. Ainsi, il existe quatre issues possibles: $\mathbf{A}=\Pi_{j\in\{1,2\}}\mathbf{A}_j=\{(H,G),(H,D),(B,G),(B,D)\}$.
3. Les fonctions de paiement des joueurs: $u_1(a_1,a_2)$ et $u_2(a_2,a_1)$, où $a_1 \in \mathbf{A}_1$ et $a_2 \in \mathbf{A}_2$. Ainsi, on a: $u_1(H,G)$, $u_1(H,D)$, $u_1(B,G)$ et $u_1(B,D)$ pour le joueur 1 et $u_2(G,H)$, $u_2(D,H)$, $u_2(G,B)$ et $u_2(D,B)$ pour le joueur 2.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Exemple avec deux joueurs et deux stratégies par joueur.

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **G** | **D** |
| **Joueur 1** | **H** | $u_1(H,G)$ ; $u_2(G,H)$ | $u_1(H,D)$ ; $u_2(D,H)$ |
| | **B** | $u_1(B,G)$ ; $u_2(G,B)$ | $u_1(B,D)$ ; $u_2(D,B)$ |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Exemple avec trois joueurs et deux stratégies par joueur.

1. L'ensemble des joueurs est **N**={1,2,3}.
2. L'ensemble des stratégies possibles est $\mathbf{A_1}$={H,B} pour le joueur 1, $\mathbf{A_2}$={G,D} pour le joueur 2 et $\mathbf{A_3}$={N,S} pour le joueur 3. Ainsi, il existe huit issues possibles: **A**={(H,G,N), (H,D,N), (B,G,N), (B,D,N), (H,G,S), (H,D,S), (B,G,S), (B,D,S)}.
3. Les fonctions de paiement des joueurs: $u_1(a_1,a_2,a_3)$, $u_2(a_2,a_1,a_3)$ et $u_3(a_3,a_1,a_2)$, où $a_1 \in \mathbf{A_1}$, $a_2 \in \mathbf{A_2}$ et $a_3 \in \mathbf{A_3}$.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Exemple avec trois joueurs et deux stratégies par joueur.

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **G** | **D** |
| **Joueur 1** | **H** | $u_1(H,G,N)$; $u_2(G,H,N)$; $u_3(N,H,G)$ | $u_1(H,D,N)$; $u_2(D,H,N)$; $u_3(N,H,D)$ |
| | **B** | $u_1(B,G,N)$; $u_2(G,B,N)$; $u_3(N,B,G)$ | $u_1(B,D,N)$; $u_2(D,B,N)$; $u_3(N,B,D)$ |

**N**

**Joueur 3**

**S**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **G** | **D** |
| **Joueur 1** | **H** | $u_1(H,G,S)$; $u_2(G,H,S)$;$u_3(S,H,G)$ | $u_1(H,D,S)$; $u_2(D,H,S)$; $u_3(S,H,D)$ |
| | **B** | $u_1(B,G,S)$; $u_2(G,B,S)$; $u_3(S,B,G)$ | $u_1(B,D,S)$; $u_2(D,B,S)$; $u_3(S,B,D)$ |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers**:
  - Le dilemme des prisonniers est probablement l'un des jeux les plus célèbres de la TJ.
  - Il met en scène deux individus détenus séparément après avoir été pris en flagrant délit pour une infraction.
  - De plus, la police les soupçonne d'avoir commis un crime, nettement plus grave que l'infraction, mais ne peut pas le prouver sans qu'au moins un des deux prisonniers ne dénonce l'autre.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers**:
  - La police propose à chaque prisonnier de dénoncer son acolyte (afin de pouvoir l'accuser du crime) en échange d'une récompense. Plus précisément, la police promet que:
    - Si un prisonnier est le seul à avoir dénoncé l'autre, il sera immédiatement **libéré** et l'autre sera condamné à ***5* ans de prison**.
    - Si les deux prisonniers gardent le silence chacun sera condamné à ***1* an de prison**.
    - En cas de dénonciation mutuelle, chacun sera condamné à ***4* ans de prison**.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

❖ **Dilemme des prisonniers**:

- Le dilemme des prisonniers est un **jeu statique** (car il se déroule en une étape) à **information complète** (chaque prisonnier connaît les stratégies possibles de l'autre et les peines encourues dans les quatre scénarios possibles), mais **imparfaite** (car chaque prisonnier n'a pas connaissance de la décision de l'autre au moment où il prend la sienne).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers**:

1. Il existe deux joueurs: J=2 et **N**={1,2}.
2. Chaque joueur dispose de deux stratégies possibles: Se taire (T) ou dénoncer l'autre (D):
   - $\mathbf{A_1}=\mathbf{A_2}=\{T,D\}$ et $\mathbf{A}=\{(T,T),(T,D),(D,T),(D,D)\}$.
3. Le jeu étant symétrique (les joueurs se trouvent exactement dans la même situation), on a les paiements suivants:

➢ $u_j(D,T)=0 > u_j(T,T)=-1 > u_j(D,D)=-4 > u_j(T,D)=-5$, avec $j \in \{1,2\}$.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers**:

| | | Prisonnier 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **T** | **D** |
| Prisonnier 1 | **T** | $u_1(T,T)$ ; $u_2(T,T)$ | $u_1(T,D)$ ; $u_2(D,T)$ |
| | **D** | $u_1(D,T)$ ; $u_2(T,D)$ | $u_1(D,D)$ ; $u_2(D,D)$ |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers**:

| | | Prisonnier 2 | |
|---|---|---|---|
| | | T | D |
| Prisonnier 1 | T | -1 ; -1 | -5 ; 0 |
| | D | 0 ; -5 | -4 ; -4 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Remarque:
  - Deux hypothèses importantes sont faites lorsque l'on étudie un jeu en statique:
    - Chaque joueur dispose d'une information imparfaite car, au moment de prendre sa décision, il ne connaît pas les décisions prises par les autres joueurs.
    - Le jeu n'est joué qu'une fois avec les mêmes joueurs. La répétition d'un jeu entre mêmes joueurs, engagés dans une relation de long terme, n'implique pas nécessairement la répétition de l'équilibre du jeu statique.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Remarque:
  - Nous avons supposé (lorsque l'on a modélisé la situation des prisonniers sous forme de jeu) que les prisonniers ont des préférences autocentrées. Autrement dit, chaque prisonnier est supposé avoir pour objectif de minimiser les années de prison pour lui seulement (sans se soucier de l'autre).
  - Si les prisonniers sont supposés altruistes et minimisent, par exemple, la somme des années de prison des deux prisonniers, le jeu étudié sera différent.
  - Maximiser son paiement (ou utilité) dans un jeu ne signifie pas avoir des préférences autocentrées.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers altruistes**:

| | | Prisonnier 2 | |
|---|---|---|---|
| | | T | D |
| Prisonnier 1 | T | -2 ; -2 | -5 ; -5 |
| | D | -5 ; -5 | -8 ; -8 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Jeu de coordination**:
  - Deux individus doivent décider d’une stratégie A ou B.
  - Le but est de faire le même choix que l’autre.
  - Les joueurs doivent donc se coordonner.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Jeu de coordination** (coordination facile par dominance parétienne):

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| Joueur 1 | A | 2 ; 2 | 0 ; 0 |
| | B | 0 ; 0 | 1 ; 1 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Jeu de coordination** (coordination difficile mais préférences homogènes):

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **A** | **B** |
| **Joueur 1** | **A** | 1 ; 1 | 0 ; 0 |
| | **B** | 0 ; 0 | 1 ; 1 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Bataille des sexes** (coordination très difficile avec préférences hétérogènes):
  - Deux individus doivent décider du lieu où passer leur soirée. Ils ont le choix entre le lieu A et le lieu B.
  - Chacun préfère toujours être avec l'autre (se coordonner), mais le joueur 1 préfère le lieu A au lieu B, tandis que le joueur 2 préfère le lieu B au lieu A.
  - L'histoire initiale fait intervenir un couple, d'où le nom du jeu.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Bataille des sexes** (coordination très difficile avec préférences hétérogènes):

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **A** | **B** |
| **Joueur 1** | **A** | 2 ; 1 | 0 ; 0 |
| | **B** | 0 ; 0 | 1 ; 2 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Pile ou face**:
  - On considère deux joueurs, chacun dispose d'une pièce de monnaie et choisit de la placer soit sur pile (P), soit sur face (F): $\mathbf{A_1}=\mathbf{A_2}=\{P,F\}$ et $\mathbf{A}=\{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$.
    - Si les choix sont identiques, le joueur 1 gagne et le joueur 2 donne 1€ au joueur 1:
      - $u_1(P,P) = u_1(F,F) = -u_2(P,P) = -u_2(F,F) = 1$.
    - Si les choix diffèrent, le joueur 2 gagne et le joueur 1 donne 1€ au joueur 2:
      - $u_2(P,F) = u_2(F,P) = -u_1(P,F) = -u_1(F,P) = 1$.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Pile ou face** (jeu à somme nulle):

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **P** | **F** |
| **Joueur 1** | **P** | 1 ; -1 | -1 ; 1 |
| | **F** | -1 ; 1 | 1 ; -1 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Définition d'un jeu à somme nulle**:
  - On peut remarquer que dans le jeu pile ou face, le gain d'un joueur vaut exactement la perte de l'autre.
  - Un jeu à deux joueurs est **à somme nulle** lorsque la somme des paiements des joueurs est nulle quelle que soit l'issue du jeu.
  - Comme les intérêts des joueurs y sont diamétralement opposés, on qualifie également les jeux à somme nulle de **jeux strictement compétitifs**.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Pile ou face** (sans les paiements du joueur 2):

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | P | F |
| Joueur 1 | P | 1 | -1 |
| | F | -1 | 1 |

Souvent, dans les jeux à deux joueurs et à somme nulle , pour simplifier, on ne représente que les paiement du joueur 1 (ceux du joueurs 2 étant immédiatement déduits).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Poule mouillée/Faucon-Colombe**:

  - Deux joueurs se confrontent et peuvent adopter soit un comportement dominant (F) soit un comportement conciliant (C).

1. La meilleure issue pour un joueur est d'apparaître dominant lorsque l'autre est conciliant (victoire sans combat).
2. Puis celle où chacun est conciliant (combat évité, statu quo).
3. Puis celle où il est conciliant tandis que l'autre est dominant (humiliation).
4. La pire issue est celle où les deux joueurs se comportent en dominant (combat coûteux pour tous).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Poule mouillée/Faucon-Colombe:**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **F** | **C** |
| Joueur 1 | **F** | -1 ; -1 | 10 ; 0 |
| | **C** | 0 ; 10 | 5 ; 5 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Guerre d’attribution**:
  - Il existe quatre zones à conquérir.
    - Le Colonel  Ligne dispose d’une unité d’infanterie à placer dans l’une des quatre zones (1, 2, 3 ou 4).
    - Le Colonel Colonne dispose de deux unités d’infanterie et peut placer, au plus, une unité par zone (1.2, 1.3, 1.4, 2.3, 2.4 ou 3.4). Par exemple, 2.4 signifie qu’il place une unité en zone 2 et une unité en zone 4.
    - Une unité non contestée dans une zone remporte la victoire et le Colonel victorieux obtient un paiement de 1. S’il y a conflit, le paiement est de 0 pour les deux Colonels.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Guerre d'attribution**:

**Colonel Colonne**

**Colonel Ligne**

|  | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 2.3 | 2.4 | 3.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 ; 1 | 0 ; 1 | 0 ; 1 | 1 ; 2 | 1 ; 2 | 1 ; 2 |
| 2 | 0 ; 1 | 1 ; 2 | 1 ; 2 | 0 ; 1 | 0 ; 1 | 1 ; 2 |
| 3 | 1 ; 2 | 0 ; 1 | 1 ; 2 | 0 ; 1 | 1 ; 2 | 0 ; 1 |
| 4 | 1 ; 2 | 1 ; 2 | 0 ; 1 | 1 ; 2 | 0 ; 1 | 0 ; 1 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Enchères de Vickrey au second prix** (jeu non matriciel)
  - Un bien indivisible est mis en vente selon une procédure d'enchères à la Vickrey. Un nombre J d’enchérisseurs soumettent leur proposition sous pli cacheté. Le bien revient au plus offrant, mais celui-ci doit payer le prix donné par la deuxième meilleure enchère. En cas d’égalité, on tire le vainqueur au sort parmi ceux ayant proposé la meilleure enchère et le gagnant paye son enchère (premier et second prix identiques dans ce cas). On note $a_j$ l’enchère d’un participant j (sa stratégie) et $v_j$ la valeur qu’il attribue au bien (disposition maximale à payer ou prix de réserve).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Concours de beauté** (jeu non matriciel)
  - Vous participez au jeu suivant avec au moins un autre joueur. Chacun doit choisir de manière privée un nombre entier compris entre 1 et 100 (bornes incluses). Le(s) joueur(s) qui propose(nt) le nombre le plus proche de 70% de la moyenne des montants proposés remporte(nt) un lot. En cas d'égalité, le lot est partagé.

  - Quel serait votre choix?

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Contribution à un bien collectif** (jeu non matriciel)
  - Considérons J individus partageant un appartement (colocation). Ils disposent d'une même quantité de temps disponible, évaluée à T heures, qui peut être consacrée soit aux activités ménagères, soit à des activités récréatives. Les colocataires décident simultanément du temps qu'ils vont consacrer aux activités ménagères.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Contribution à un bien collectif** (jeu non matriciel)
  - Chaque individu apprécie de vivre dans un appartement propre et apprécie également les activités récréatives (ou n'aime pas faire le ménage). De plus, ces dernières sont d'autant plus agréables que l'appartement est propre. Les préférences des individus sont supposées identiques. La fonction d'utilité d'un colocataire j, lorsqu'il consacre $a_j$ heures aux activités ménagères, et donc $[T\text{-}a_j]$ heures aux activités récréatives, s' écrit :
    - $u_j(a_j,A) = A+[T\text{-}a_j]+[T\text{-}aj]A$, où $A=a_1+a_2+\ldots+a_J$ est le nombre total d'heures consacrées aux activités ménagères (déterminant la propreté de l'appartement).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Exploitation d'une ressource commune** (jeu non matriciel)
  - Considérons J villageois identiques pouvant faire paître leurs vaches dans un champ communal (gratuitement accessible à chacun). Le nombre de vaches que chaque villageois choisit de posséder est noté aj. Ainsi, le nombre total de vaches dans le champ communal est $A=a_1+a_2+\ldots+a_J$. Le coût d'achat et d'entretien d'une vache est noté c. Le bénéfice par vache est donné par $B(A)=A^{max} - A$, si $A<A^{max}$ , et $B(A)=0$ si $A>A^{max}$, où $A^{max}$ représente la capacité d'accueil maximale du champ au-delà de laquelle le rendement est nul. On suppose $0<c<A^{max}$.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Pour un joueur, une stratégie est **dominée** lorsqu'elle rapporte en toutes circonstances (c.à.d. quelles que soient les décisions prises par les autres joueurs) un gain inférieur à celui que peut lui rapporter au moins une autre stratégie (qui la domine).
  - Nous distinguerons deux niveaux de dominance, la **dominance stricte** (ou forte) et la **dominance faible**.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Définition de la dominance** (stricte et faible):
  - Une stratégie $a_j$ est strictement (resp. faiblement) dominée lorsqu'il existe au moins une autre stratégie $a_{j*} \neq a_j$ telle que :

$$u_j(a_{j*}, \mathbf{a}_{-j}) > (\text{resp.} > \text{ou} =)\ u_j(a_j, \mathbf{a}_{-j}) \quad \text{pour tout } \mathbf{a}_{-j} \in \mathbf{A}_{-j}\ .$$

  - On dit également que $a_{j*}$ domine strictement (resp. faiblement) $a_j$.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Définition:
  - Lorsqu'une stratégie domine strictement (resp. faiblement) toutes les autres stratégies, on parle de **Stratégie Strictement** (resp. Faiblement) **Dominante**.
  - Lorsque tous les joueurs adoptent une stratégie strictement (resp. faiblement) dominante, la combinaison de ces stratégies forme un **Équilibre en Stratégies Strictement** (resp. Faiblement) **Dominantes**, que l'on notera **ESSD** (resp. ESFD).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Remarques:
  - Si une stratégie est strictement dominée, alors elle est faiblement dominée (réciproque fausse).
  - Si une stratégie est strictement dominante, alors elle est faiblement dominante (réciproque fausse).
  - Tout **ESSD** est un **ESFD** (réciproque fausse).
  - Un joueur peut avoir au plus une stratégie dominante (strictement ou faiblement). Ainsi, lorsqu'un jeu admet un **ESSD** ou un **ESFD**, il est unique.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Remarques:
  - Si un joueur rationnel dispose d'une stratégie strictement dominante, alors il doit la jouer.
  - Si un joueur dispose d'une stratégie strictement dominante, il n'a pas à tenir compte des paiements et des stratégies des autres joueurs.
  - Les hypothèses de **connaissance commune de la rationalité** et d'**intelligence** des joueurs sont inutiles dans le cas d'un **ESSD**. L'hypothèse de rationalité des joueurs est suffisante.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Remarques:
  - Par contre, l'hypothèse de rationalité n'interdit pas que les joueurs jouent une stratégie qui est seulement faiblement dominée et n'impose donc pas le choix de la stratégie faiblement dominante lorsqu'elle existe.
  - En effet, une stratégie faiblement dominée peut être une stratégie aussi rationnelle que la stratégie qui la domine faiblement face à certaines combinaisons de stratégies des autres joueurs.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Pour le joueur 1, l'hypothèse de rationalité ne permet pas d'exclure H ou, de manière équivalente, ne garantit pas B. Par contre, le joueur 2 doit jouer G.

**Joueur 2**

| | | **G** | **D** |
|---|---|---|---|
| **Joueur 1** | **H** | 1 ; 100 | 0 ; 0 |
| | **B** | 1 ; 100 | 1 ; 0 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers**:
  - La stratégie T est strictement dominée par D (car 0>-1 et -4>-5).
  - Autrement dit, **D est une stratégie strictement dominante**.
  - Ainsi, le jeu du dilemme des prisonniers admet un **ESSD** qui est (D,D) et où les paiements sont (-4,-4).
  - Alors que cet équilibre repose sur l'hypothèse de rationalité des joueurs, on constate qu'il correspond à une issue **inefficace au sens de Pareto**. C'est d'ailleurs la seule des quatre issues possibles qui ne soit pas un **optimum de Pareto**.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Définition de la dominance Parétienne**:
  - Une issue **a** est **Pareto-dominée** par l'issue $\mathbf{a}_* \neq \mathbf{a}$ si :

    $u_j(\mathbf{a}_*) \geq u_j(\mathbf{a})$ pour tout $j \in \mathbf{N}$.
  - Une issue est un **optimum de Pareto** si elle n'est Pareto-dominée par aucune autre issue.
  - Une issue est **Pareto-dominante** si toutes les autres issues sont Pareto-dominées par elle.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers**:
  - Puisque l'issue {D;D} est Pareto-dominée par l'issue {T;T}, car -1 > -4, chaque joueur devrait être d'accord pour coopérer en jouant T (puisque tous les joueurs seraient gagnants).
  - Alors qu'il peut sembler irrationnel d'aboutir à l'issue {D;D}, c'est précisément l'hypothèse de rationalité des joueurs qui implique qu'ils jouent D.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers**:
  - Le jeu du dilemme des prisonniers illustre ainsi le fait que **des comportements individuels rationnels peuvent aller à l'encontre de l'intérêt collectif**.
  - On parle de dilemme car, d'un côté, chaque joueur trouverait sont intérêt dans une coopération coordonnée et simultanée, mais d'un autre côté, **dévier unilatéralement** de cette dernière est profitable, ce qui induit des comportements de type **passager clandestin**.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Dilemme des prisonniers comme mécanisme incitatif**:
  - Une autre interprétation possible est de voir le dilemme des prisonniers comme un mécanisme incitatif conçu par la police pour faire avouer les prisonniers.
  - Compte tenu du fait qu'ils sont isolés l'un de l'autre et du marché proposé par la police (remise de peine contre dénonciation) la meilleure stratégie des prisonniers est d'avouer.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- Production privée des biens collectifs purs (situation de type DP):
  - Un bien collectif pur possède les propriétés de **non-exclusion** et de **non-rivalité** d'usage.
    - Le problème pratique que posent de tels biens est un problème d'incitation à produire pour les agents économiques.
      - En conséquence, **les biens collectifs ne sont généralement pas produits en quantité suffisante par les agents privés** (sous optimale au sens de Pareto) même si un marché existe.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Production privée des biens collectifs purs** (situation de type DP):
  - On considère deux individus pouvant contribuer (action C) ou non (action N) à l'achat d'un bien public pur. Contribuer coûte c>0, et rapporte g>0 à tous les joueurs.

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **C** | **N** |
| **Joueur 1** | **C** | 2g-c ; 2g-c | g-c ; g |
| | **N** | g ; g-c | 0 ; 0 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Production privée des biens collectifs purs** (situation de type DP):
  - $2.g-c<g$ et $g-c<0 \Leftrightarrow g<c \Leftrightarrow \{N,N\}$ est un **ESSD**.
  - $2.g-c>0 \Leftrightarrow g>½.c \Leftrightarrow \{N,N\}$ est Pareto dominée par $\{C,C\}$.
  - Il y a donc dilemme des prisonniers lorsque : $½.c<g<c$ (ex. $c=3$ et $g=2$).

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | C | N |
| Joueur 1 | C | 1 ; 1 | -1 ; 2 |
| | N | 2 ; -1 | 0 ; 0 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Surexploitation d'une ressource commune** (situation de type DP):
  - Le jeu du dilemme des prisonniers peut aussi rendre compte du problème de la surexploitation d'une ressource commune (**tragédie des ressources communes de Hardin**, 1968).
  - Considérons deux pêcheurs sur une petite rivière à truites. Chacun a intérêt à pêcher le plus de truites possible, mais ce comportement réduit le stock de truites dans la rivière (les truites ne peuvent plus se reproduire à un taux suffisant).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Surexploitation d'une ressource commune** (situation de type DP):
  - Forme stratégique du jeu:
    - Il existe deux joueurs identiques: Pêcheur 1 et Pêcheur 2.
    - Chaque joueur dispose de deux stratégies possibles: soit il se restreint dans ses captures (stratégie R), soit il exploite la ressource au maximum (action E). Quatre issues sont possibles: (R;R), (R;E), (E;R) et (E;E).
    - Le paiement d'un joueur est donné par la quantité de truites qu'il prélève: (2;2), (0;3), (3;0) et (1;1).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Surexploitation d'une ressource commune** (situation de type DP):

| | | Pêcheur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | R | E |
| Pêcheur 1 | R | 2 ; 2 | 0 ; 3 |
| | E | 3 ; 0 | 1 ; 1 |

  - La situation est la même que celle décrite par le dilemme des prisonniers: L'issue du jeu est inefficace et la ressource commune est surexploitée: **ESSD**=(E,E).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- En fait, il y a dilemme des prisonniers dans un jeu 2*2 chaque fois que l'on est en présence d'une matrice des paiements de la forme suivante :

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **A** | **B** |
| **Joueur 1** | **A** | x ; x | z ; w |
| | **B** | w ; z | y ; y |

- Avec w>x>y>z, chaque joueur dispose d'une stratégie strictement dominante (B car w>x et y>z) et l'**ESSD** en {B;B} est strictement Pareto-dominé par {A;A} (car x>y).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Beaucoup de problèmes économiques présentent une forme stratégique similaire à celle du dilemme des prisonniers**:
  - **Course à l'armement nucléaire**:
    - Chacun a intérêt à disposer d'une capacité nucléaire plus forte que les autres afin de paraître plus fort. Au final, chacun dispose d'une capacité nucléaire extrêmement élevée (donc coûteuse) mais inutile (car seule la capacité relative compte) et dangereuse. L'égalité des forces ne peut constituer un équilibre dans ce jeu, encore moins à un niveau de capacité nucléaire bas.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Réduction des émissions de gaz à effets de serre**:
  - Les pays ont collectivement intérêt à réduire les émissions, mais chacun préfère profiter des bienfaits des réductions des autres sans augmenter ses coûts en réduisant les siennes.
- **Coordination des politiques économiques**:
  - Les pays ont généralement intérêt à coordonner leurs politiques monétaires, fiscales ou encore de relance.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Production privée des biens collectifs purs** (situation de type DP, non matricielle):
  - Un groupe de 100 individus participe à l'expérience. Chacun dispose de 10 unités de paiement qu'il peut dépenser en achetant un bien privé ou un bien collectif.
  - Les deux biens coûtent une unité de paiement.
  - Une unité de bien privé donne un paiement de 5€ uniquement à celui qui l'achète.
  - Une unité de bien collectif donne un paiement de 1€ à celui qui l'achète et à tous les autres joueurs.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Production privée des biens collectifs purs** (situation de type DP, non matricielle):
  - **Acheter 10 unités de bien privé et 0 unité de bien collectif est une stratégie strictement dominante pour chaque joueur.**

    - Soit cj le montant investi par un joueur j dans le bien collectif.

    - Soit $C = c_1 + c_2 + \ldots + c_{100}$ le montant total investi par les joueurs dans le bien collectif et $C_{-j} = C - c_j$ le montant total investi par les autres joueurs que j.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Production privée des biens collectifs purs** (situation de type DP, non matricielle):
  - ○ Le paiement d'un joueur j est: $C+5(10 - c_j) = C+50 - 5c_j = C_{-j}+50 - 4c_j$.
  - ○ Quelle que soit la contribution des autres, il est clair que $c_j=0$ donne un paiement strictement plus fort que toutes les autres stratégies dont dispose le joueur j (c.à.d. $c_j=1,2,\ldots,10$) quel que soit le choix des autres (c.à.d. $C_{-j}=0,1,2,\ldots,990$)
  - ○ **A l'ESSD personne ne contribue au bien collectif et chacun obtient 50 Euros.**

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Production privée des biens collectifs purs** (situation de type DP, non matricielle):
  - **A l'optimum social égalitaire (où la somme des paiements est maximisée), chaque joueur investit uniquement dans le bien collectif.**
    - La somme des paiements s'écrit : $C+5(10 – c_1)+ C+5(10 – c_2)+\ldots+C+5(10 – c_{100}) = 100C +5000 -5C = 95C+5000$.
    - Il est clair que $C=1000$ (soit $c_i=10$) maximise la somme des paiements, et **chaque joueur obtiendrait 1000 Euros** (contre 50 Euros à l'**ESSD)**.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Enchères** (ex. Art, Sotheby à NY):
  - On peut modéliser une enchère au second prix (à la Vickrey) comme un jeu sous forme stratégique et montrer que, dans une telle enchère, enchérir à hauteur exacte de son évaluation est une stratégie (faiblement dominante).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **ESSD** dans un jeu à trois joueurs: **ESSD**=(H,D,S):

Joueur 2

Joueur 1

|   | G | D |
|---|---|---|
| H | 3 ; 3 ; 3 | 2 ; 5 ; -1 |
| B | 1 ; 1 ; 0 | 1 ; 5 ; 0 |

N

Joueur 3

S

Joueur 2

Joueur 1

|   | G | D |
|---|---|---|
| H | 1 ; 1 ; 7 | 0 ; 9 ; 0 |
| B | 0 ; 0 ; 1 | -1 ; 3 ; 1 |

# Partie 1: Jeux statiques

- Jeux sous forme stratégique et dominance
- **Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées**
- Equilibre de Nash
- Stratégies mixtes
- Jeux à somme nulle

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- Il en fait plutôt rare que chaque joueur dispose d'une stratégie strictement (ou même faiblement) dominante. Autrement dit, **il n'existe pas nécessairement d'ESSD** (ou d'**ESFD**).
- Toutefois, lorsque l'on cherche la solution d'un jeu, on commence toujours par éliminer les stratégies strictement dominées puisqu'elles ne sont jamais choisies par un joueur rationnel.
  - Après avoir éliminé une stratégie strictement dominée d'un joueur, il se peut que le jeu réduit comporte des stratégies strictement dominées pour d'autres joueurs (alors qu'elles ne l'étaient pas forcément dans le jeu initial). Sous l'hypothèse de **connaissance commune de la rationalité**, on peut résoudre certains jeux en éliminant les stratégies strictement dominées de manière successive.

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- **Définition de l'EEISSD**:
  - Lorsque l'on parvient à dégager une unique issue du jeu en éliminant par itérations successives les stratégies strictement dominées, cette issue constitue un **E**quilibre par **E**limination **I**térative des **S**tratégies **S**trictement **D**ominées (**EEISSD** par la suite).
- Tout **ESSD** est un **EEISSD**, mais la réciproque est fausse.
- Contrairement à l'**ESSD**, qui repose uniquement sur l'hypothèse de rationalité individuelle, l'**EEISSD** nécessite, en plus, l'**hypothèse de connaissance commune de la rationalité individuelle**.

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- **Exemple d'EEISSD**:

| | | Joueur 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **G** | ~~**C**~~ | **D** |
| | **H** | 3 ; 1 | ~~8 ; 0~~ | 2 ; 6 |
| Joueur 1 | **M** | 4 ; 3 | ~~2 ; 2~~ | 3 ; 0 |
| | **B** | 3 ; 2 | ~~3 ; 1~~ | 4 ; 1 |

- Le joueur 1 ne possède pas de stratégie strictement ou faiblement dominante. Ce jeu n'admet donc pas d'ESSD ou d'ESFD.

- Toutefois la stratégie C du joueur 2 est strictement dominée par sa stratégie G (car 1>0, 3>2 et 2>1). Si le joueur 2 est rationnel, il ne jouera jamais C *(Elimination 1)*.

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- Sous l’hypothèse de connaissance commune de la rationalité, les deux joueurs considèrent maintenant le jeu suivant:

| | | **Joueur 2** | |
|---|---|---|---|
| | | **G** | **D** |
| **Joueur 1** | ~~**H**~~ | ~~3 ; 1~~ | ~~2 ; 6~~ |
| | **M** | 4 ; 3 | 3 ; 0 |
| | **B** | 3 ; 2 | 4 ; 1 |

  - Le joueur 1 possède maintenant une stratégie strictement dominée qui ne l’était pas dans le jeu initial. H est strictement dominée par M (car 4>3 et 3>2). Si le joueur 1 est rationnel, il ne jouera jamais H (*Elimination 2*).

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- Sous l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité, les deux joueurs considèrent maintenant le jeu suivant:

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **G** | ~~**D**~~ |
| **Joueur 1** | **M** | 4 ; 3 | ~~3 ; 0~~ |
| | **B** | 3 ; 2 | ~~4 ; 1~~ |

  - Le joueur 2 possède maintenant une stratégie strictement dominée. D est strictement dominée par G (car 3>0 et 2>1). Si le joueur 2 est rationnel, il ne jouera jamais D *(Elimination 3)*.

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- Sous l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité, les deux joueurs considèrent finalement le jeu suivant:

Joueur 2

| | | G |
|---|---|---|
| Joueur 1 | M | 4 ; 3 |
| | ~~B~~ | ~~3 ; 2~~ |

- Le joueur 1 possède maintenant une stratégie strictement dominée. B est strictement dominée par M (car 4>3). Si le joueur 1 est rationnel, il ne jouera jamais B (*Elimination 4*).

- L'issue ainsi obtenue est {M;G}. C'est un **EEISSD**.

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- **Autre exemple d’EEISSD**:

**Joueur 2**

| | | G | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **Joueur 1** | **H** | 4 ; 3 | 5 ; 1 | 6 ; 2 |
| | **M** | 2 ; 1 | 8 ; 4 | 3 ; 6 |
| | **B** | 3 ; 0 | 9 ; 6 | 2 ; 8 |

- Montrer que ce jeu admet un EEISSD.

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

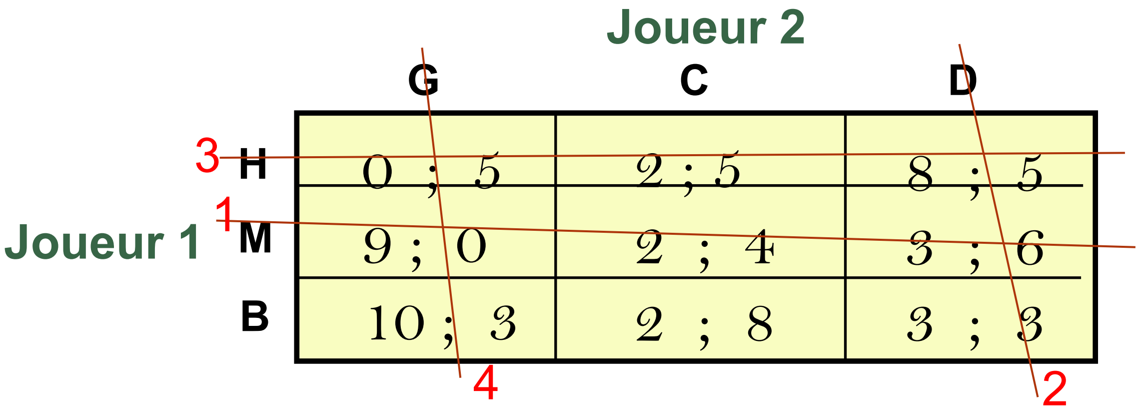
- **Limite de l'EEISFD** (l'ordre d'élimination compte):

| | | Joueur 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | G | C | D |
| Joueur 1 | H | 0 ; 5 | 2 ; 5 | 8 ; 5 |
| | M | 9 ; 0 | 2 ; 4 | 3 ; 6 |
| | B | 10 ; 3 | 2 ; 8 | 3 ; 3 |

- Aucun joueur ne dispose d'une stratégie strictement dominée. Toutefois, M est faiblement dominée par B. De plus, G est faiblement dominée par C et D.
- Nous allons voir que différents ordres d'élimination des stratégies faiblement dominées conduisent à identifier des issues différentes.

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- <u>Scénario 1:</u> Élimination de M, puis D (faiblement dominée par C), puis H (faiblement dominée par B), et enfin G (strictement dominée par C). L'issue est{B,C}.

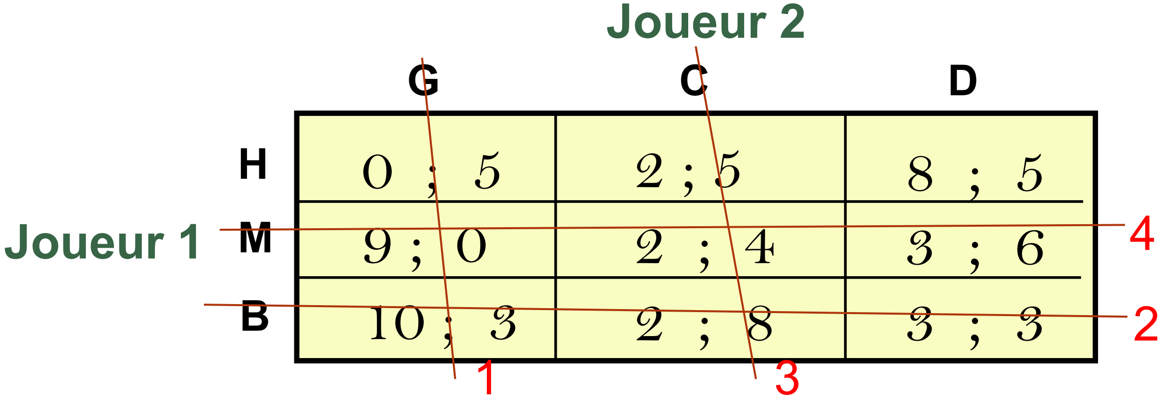


**Joueur 2**

| | | G | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **Joueur 1** | **H** | 0 ; 5 | 2 ; 5 | 8 ; 5 |
| | **M** | 9 ; 0 | 2 ; 4 | 3 ; 6 |
| | **B** | 10 ; 3 | 2 ; 8 | 3 ; 3 |

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- Scénario 2: Élimination de G, puis B (faiblement dominée par H), puis C (faiblement dominée par D), et enfin M (strictement dominée par H). L’issue est {H,D}.

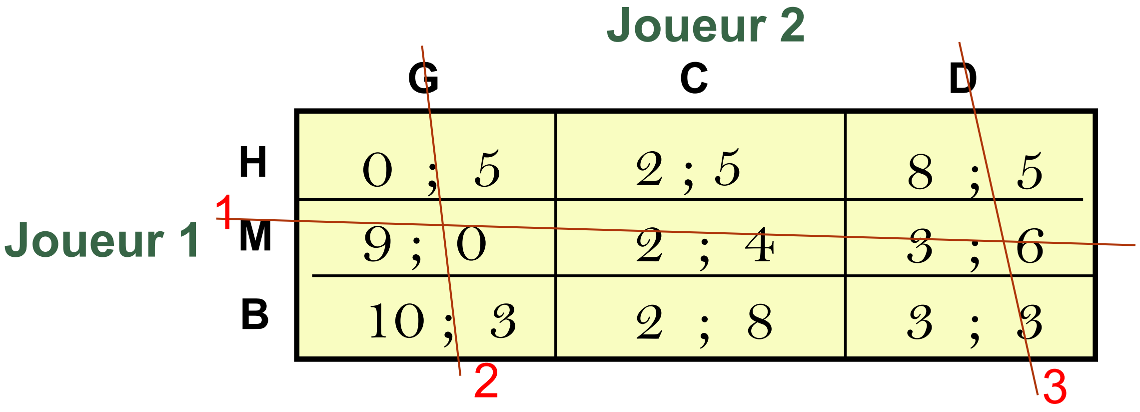


Joueur 2

| Joueur 1 | | G | C | D |
|---|---|---|---|---|
| | H | 0 ; 5 | 2 ; 5 | 8 ; 5 |
| | M | 9 ; 0 | 2 ; 4 | 3 ; 6 |
| | B | 10 ; 3 | 2 ; 8 | 3 ; 3 |

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- <u>Scénario 3:</u> Élimination de M, puis G et D (faiblement dominées par C). Les issues sont: {H,C} et {B,C}.



| | ~~G~~ | C | ~~D~~ |
|---|---|---|---|
| H | ~~0 ; 5~~ | 2 ; 5 | ~~8 ; 5~~ |
| ~~M~~ | ~~9 ; 0~~ | ~~2 ; 4~~ | ~~3 ; 6~~ |
| B | ~~10 ; 3~~ | 2 ; 8 | ~~3 ; 3~~ |

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- **Limite de l'EEISSD (Défaillance de rationalité et prudence)**:

Joueur 2

|  |  | G | D |
|---|---|---|---|
| Joueur 1 | H | 8 ; 10 | -100 ; 9 |
|  | B | 7 ; 6 | 6 ; 5 |

**EEISSD**=(H,G). Pourtant J1 pourrait être tenté par la stratégie prudente B qui garantit un paiement de 6 (et évite la perte -100).

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- **Limite de l'EEISFD (Défaillance de rationalité - Guess the average / Beauty contest)**:

  - Soit un jeu à N joueurs dans lequel chaque joueur doit choisir un nombre entier entre 1 et 100. Le but du jeu est de choisir un nombre le plus proche des 70% de la moyenne de tous les choix pour remporter un lot. En cas d'égalité, le lot est partagé entre les gagnants.

  - Quel est votre choix?

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- Les expériences économiques en laboratoire montrent que les individus choisissent généralement des nombres entre 13 et 25.

- Pourtant, l'**EEISFD** correspond au cas où tous les joueurs choisissent 1! (Nous verrons que c'est également le seul **équilibre de Nash** du jeu).

- Soit les joueurs ne sont pas suffisamment rationnels ou ne comprennent pas le jeu, soit ils doutent de la rationalité des autres, ou même seulement de ce que pensent les autres concernant la rationalité des autres...

# Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

- **Limite de la dominance forte (non-existence)**:

  - L'**ESSD** et l'**EEISSD** restent des concepts de solution solides dans le sens où ils reposent sur un nombre limité d'hypothèses (rationalité et connaissance commune de la rationalité des joueurs) même si celles-ci peuvent toutefois être remises en question.
  - Mais dans la plupart des jeux, il n'existe pas d'**ESSD**, et pas non plus d'**EEISSD** : Problème de **non-existence** de l'équilibre.

  - Le concept d'**EN**, que nous allons étudier dans la prochaine section, ne souffre pas de ce problème (tous les jeux finis admettent au moins un **EN**).

# Partie 1: Jeux statiques

- Jeux sous forme stratégique et dominance
- Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées
- **Equilibre de Nash**
- Stratégies mixtes
- Jeux à somme nulle

# Equilibre de Nash

- **Intuition de l'EN**:

  - Quelle stratégie adopter lorsque l'on ne possède pas de stratégie strictement dominante? Pour répondre à cette question, on doit d'abord chercher à anticiper le choix des autres joueurs et à y répondre de manière optimale (par une meilleure réponse).

    - Si notre prédiction concernant le choix des autres se révèle fausse, alors nous regrettons notre choix et révisons notre prédiction du choix des autres (**EN** non atteint).

    - Si par contre notre prédiction et celle des autres joueurs se révèlent exactes, alors personne ne regrette son choix lorsqu'il découvre le choix des autres (**EN** atteint).

# Equilibre de Nash

- L'**EN** (Nash, 1951), est un concept fondamental de la théorie des jeux. A l'**EN**, chaque joueur adopte une stratégie qui est une meilleure réponse aux stratégies adoptées par les autres. Ainsi, lorsqu'un **EN** émerge, aucun joueur ne regrette son choix lorsqu'il découvre le choix des autres.

- **Définition formelle de l'EN**:
  - Dans un jeu sous forme stratégique, une combinaison de stratégies $\mathbf{a}_*$ est un **EN** si et seulement si la stratégie de chaque joueur est une meilleure réponse à la combinaison de stratégies des autres joueurs:

$$U_j(\mathbf{a}^*) \geq U_j(a_j\ ,\ \mathbf{a}^*_{-j}) \ \text{ pour tout } a_j \in \mathbf{A_j} \ \text{ et pour tout } j \in \mathbf{N}.$$

# Equilibre de Nash

- **Conditions nécessaires et suffisantes à l'EN**:

1. Chaque joueur choisit une stratégie qui est une meilleure réponse à la conjecture qu'il forme concernant le choix des autres joueurs.

2. Les conjectures des joueurs sont correctes.

# Equilibre de Nash

- **Paraboles/interprétations de l'EN**:

  - Il existe différentes interprétations et justifications possibles de l'**EN**.

  - Certaines idées ont été formalisées et d'autres sont restées à l'état d'intuitions.

  - Les différentes interprétations ne sont pas à opposer, mais sont plutôt complémentaires. Elles devraient vous convaincre du caractère raisonnable du concept d'**EN**.

# Equilibre de Nash

- L'**EN** est une **prescription** aux joueurs (i.e. quelle stratégie choisir?)
  - Noter qu'il est difficile de prescrire aux joueurs des stratégies qui ne forment pas un **EN**.
  - Si tel est le cas, au moins un joueur se voit prescrire une stratégie qui n'est pas rationnelle (pas une meilleure réponse aux stratégies prescrites aux autres). Il pourrait alors légitimement questionner ce qui est prescrit!

## Equilibre de Nash

- L'**EN** est une issue sur laquelle les joueurs peuvent se **coordonner** (s'entendre pour l'atteindre) lors d'une **communication préalable** au jeu.
  - En effet, personne n'a intérêt à **dévier unilatéralement** d'un accord visant à atteindre un **EN**.
  - Par contre, au moins un joueur aura un **engagement non crédible** dans tout accord visant à atteindre une issue qui n'est pas un **EN**.

# Equilibre de Nash

- Par **introspection rationnelle**, sous l'hypothèse de **connaissance commune de la rationalité**, chaque joueur se rend compte qu'il n'est pas raisonnable d'anticiper une issue qui ne soit pas un **EN**.

  - En effet, anticiper une issue qui n'est pas un **EN** suppose d'anticiper qu'au moins un des joueurs va se tromper et regretter son choix lorsqu'il découvrira celui des autres.

# Equilibre de Nash

- L'**EN** est un **point focal** (Schelling, 1960).
  - L'idée du point focal est que certaines stratégies se distinguent des autres car elles possèdent des caractéristiques particulières (du point de vue des joueurs).
  - Les stratégies qui sont associées à un **EN** sont plus particulièrement remarquables pour les joueurs car elles sont telles que personne ne regrettera son choix si tous les joueurs choisissent ces stratégies.

# Equilibre de Nash

- Par **essai-erreur**, les joueurs devraient **converger** vers un **EN**.
  - Si une issue qui n'est pas un **EN** est atteinte, certains joueurs auront le sentiment d'avoir commis une erreur.
  - Ainsi, lors d'une prochaine participation au même jeu, les joueurs modifieront leur conjecture concernant le choix des autres et changeront leur stratégie.
  - Ce cycle s'arrête lorsqu'un **EN** est atteint (mais il n'est toutefois pas garanti que le processus converge).

# Equilibre de Nash

- **Deux questions émergent concernant l'EN:**

1. **Existence**: Est-ce que tous les jeux admettent au moins un **EN**?
    - 1.1. Noter que la plupart des jeux n'admettent pas d'**ESSD** ou d'**EEISSD**.
2. **Unicité**: Est-ce qu'un jeu peut admettre plusieurs **EN**?
    - 2.1. Noter que si un **ESSD** ou un **EEISSD** existe, alors il est unique.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Exemples. Jeu de coordination**:

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| Joueur 1 | A | **EN**<br>$\underline{2}$ ; $\underline{2}$ | 0 ; 0 |
| | B | 0 ; 0 | **EN**<br>$\underline{1}$ ; $\underline{1}$ |

Deux **EN**: (A,A) et (B,B). Pas d'**EEISSD** ni d'**ESSD**.

# Equilibre de Nash

- **Exemple. Bataille des sexes:**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| Joueur 1 | A | EN<br>$\underline{2}$ ; $\underline{1}$ | 0 ; 0 |
| | B | 0 ; 0 | EN<br>$\underline{1}$ ; $\underline{2}$ |

Deux **EN**: (A,A) et (B,B). Pas d'**EEISSD** ni d'**ESSD**.

# Equilibre de Nash

- Le jeu de la bataille des sexes illustre notamment le fait qu'il est parfois difficile de sélectionner un **EN** en particulier.

- La raison est que le critère de Pareto est ici inopérant. Il ne permet pas de comparer les issues (A,A) et (B,B).

- De même pour le jeu de coordination rappelé ci-dessous.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Exemples. Jeu de coordination** (difficile):

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **A** | **B** |
| **Joueur 1** | **A** | **EN**<br>$\underline{1}$ ; $\underline{1}$ | 0 ; 0 |
| | **B** | 0 ; 0 | **EN**<br>$\underline{1}$ ; $\underline{1}$ |

Deux **EN**: (A,A) et (B,B). Pas d’**EEISSD** ni d’**ESSD**.

# Equilibre de Nash

- Parfois le critère de Pareto est opérant, mais il apparaît comme un moyen de coordination moins convaincant.

- La raison est qu'il peut entrer en conflit avec un autre critère: le **niveau de risque**.

- Le jeu suivant introduit par Harsanyi et Selten (1988) illustre ce point.

# Equilibre de Nash

- **Limite du critère de Pareto pour sélectionner l’EN:**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **A** | **B** |
| **Joueur 1** | **A** | **EN**<br>$\underline{9}$ ; $\underline{9}$ | 0 ; 8 |
| | **B** | 8 ; 0 | **EN**<br>$\underline{7}$ ; $\underline{7}$ |

Deux **EN**: (A,A) et (B,B). L’issue (A,A) est l’issue Pareto-dominante (unanimement préférée). L’issue (B,B), est l’issue Risque-dominante (B est une stratégie prudente).

# Equilibre de Nash

- (A,A) est un **EN** attractif car il garantit le paiement maximal. C'est l'issue Pareto dominante. Si une communication préalable au jeu est possible, une entente tacite sur l'issue (A,A) est stable (puisque c'est un **EN**).
- Toutefois, B est une stratégie prudente pour chaque joueur (elle garantit un paiement de 7). La combinaison des stratégies prudentes des joueurs est un **EN**. Il est donc tout à fait rationnel de jouer B dans ce jeu.
- Si un joueur pense qu'il y a plus d'une chance sur huit pour que l'autre joue B, alors il est rationnel de jouer B. Le risque joue ici contre le critère de Pareto.

# Equilibre de Nash

- Harsanyi et Selten (1988) font également remarquer que chaque joueur va se rendre compte que son paiement est toujours plus fort lorsque l'autre joueur joue A.
- Même après avoir conclu une entente tacite sur l'issue (A,A), chaque joueur peut penser que l'autre veut simplement l'amener à jouer A, quelle que soit la stratégie qu'il a réellement l'intention de jouer.
- Ce type de considérations peut détruire l'entente tacite sur (A,A).

# Equilibre de Nash

- Le critère de Pareto comme moyen de coordination trouve également ses limites dans les **jeux à plus de deux joueurs**.

- La raison est qu'il peut exister des ententes tacites entre des sous groupes de joueurs (ce qui n'est pas possible dans le cas de deux joueurs).

- Le jeu suivant illustre ce point.

# Equilibre de Nash

- **Limite du critère de Pareto dans un jeu à trois joueurs:**

Joueur 3 : N

Joueur 2

| | | G | D |
|---|---|---|---|
| Joueur 1 | H | $\underline{0}$ ; $\underline{0}$ ; $\underline{10}$ | $-5$ ; $-5$ ; $\underline{0}$ |
| | B | $-5$ ; $-5$ ; $\underline{0}$ | $\underline{1}$ ; $\underline{1}$ ; $-5$ |

Joueur 3 : S

Joueur 2

| | | G | D |
|---|---|---|---|
| Joueur 1 | H | $\underline{-2}$ ; $\underline{-2}$ ; $0$ | $-5$ ; $-5$ ; $\underline{0}$ |
| | B | $-5$ ; $-5$ ; $\underline{0}$ | $\underline{-1}$ ; $-\underline{1}$ ; $\underline{5}$ |

## Equilibre de Nash

- L'**EN** (H,G,N) est unanimement préféré à l'**EN** (B,D,S), car l'issue (H,G,N) Pareto-domine l'issue (B,D,S). Si une communication préalable au jeu est possible, une entente tacite sur l'issue (H,G,N) est stable (puisque c'est un **EN**).

- Toutefois, J3 peut remarquer que J1 et J2 pourraient en fait s'entendre conjointement pour jouer B et D après avoir convaincu J3 de jouer N (et ainsi obtenir un paiement de 1 supérieur à celui de l'**EN** qui est de 0).

- Ces considérations peuvent détruire l'entente tacite sur (H,G,N).

# Equilibre de Nash

- **Théorème:**

  - Tout **ESSD** est un **EEISSD**. Tout **EEISSD** est un **EN**.

  - Si un jeu admet un **ESSD** ou un **EEISSD**, alors c'est le seul **EN** du jeu.

  - En effet, l'ensemble des **EN** est inclus dans l'ensemble des issues qui résistent à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées.

# Equilibre de Nash

- **Exemples. Dilemme des prisonniers:**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **A** | **B** |
| Joueur 1 | **A** | $3$ ; $3$ | $1$ ; $\underline{4}$ |
| | **B** | $\underline{4}$ ; $1$ | **EN = ESSD = EEISSD**<br>$\underline{2}$ ; $\underline{2}$ |

Un unique **EN**: (B,B). C'est également un **ESSD** et un **EEISSD**.

# Equilibre de Nash

- **Exemples. Bataille des sexes:**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| Joueur 1 | A | EN<br>$\underline{2}$ ; $\underline{1}$ | 0 ; 0 |
| | B | 0 ; 0 | EN<br>$\underline{1}$ ; $\underline{2}$ |

Deux **EN**: (A,A) et (B,B). Pas d'**EEISSD** ni d'**ESSD**.

# Equilibre de Nash

- **Théorème:**
  - Tout **jeu fini** admet au moins un **EN** en **stratégies mixtes**.
    - Nous aborderons les stratégies mixtes et l'**EN** en stratégies mixtes dans la prochaine section.

# Equilibre de Nash

- **Exemples. Pile ou face:**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **P** | **F** |
| Joueur 1 | **P** | $\underline{1}$ ; -1 | -1 ; $\underline{1}$ |
| | **F** | -1 ; $\underline{1}$ | $\underline{1}$ ; -1 |

Pas d'**EN** en stratégies pures, *mais* un **EN** en stratégies mixtes.

# Equilibre de Nash

- **Etude de cas. L'araignée du désert (*Agelenopsis aperta*):**
  - Les araignées femelles de cette espèce pondent leurs œufs sur des toiles.
  - Construire une toile est coûteux.
  - Ainsi, les biologistes ont remarqué que les araignées femelles s'affrontaient souvent pour conquérir une toile existante (chaque araignée secoue violemment la toile pour impressionner l'autre).
  - Le combat (généralement sans contact) se termine lorsque l'une des deux araignées s'enfuit et laisse la toile à l'autre.

# Equilibre de Nash

- Les biologistes ont cherché à expliquer deux faits empiriques (au delà de l'histoire des araignées):

1. La plupart des conflits sont résolus sans combat lorsque le combat est coûteux.
2. Lorsque les enjeux sont plus importants, le combat est plus probable.

- Le jeu suivant donne une explication de ces faits empiriques.

# Equilibre de Nash

- **Poule mouillée appliqué aux araignées:**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **Combat** | **Concède** |
| **Joueur 1** | **Combat** | x ; x | $\underline{10}$ ; 0 |
| | **Concède** | 0 ; $\underline{10}$ | 5 ; 5 |

(i) 10 = valeur d'une toile. (ii) ½ = proba d'obtenir une toile face si combat vs combat ou concède vs concède. (iii) 5 = valeur espérée d'une toile si combat vs combat ou concède vs concède. (iv) x = 5 - coût des blessures.

# Equilibre de Nash

- **Poule mouillée appliqué aux araignées:**
  - Si le **coût des blessures est élevé,** plus grand que 5, alors on a **x<0**. **L'enjeu est faible** car le bénéfice net espéré de la victoire est limité.
    - ➢ Il existe deux **EN** (Combat, Concède) et (Concède, Combat).
  - Si le **coût des blessures est bas**, plus petit que 5, alors on a **x>0**. **L'enjeu est plus fort** car le bénéfice net espéré de la victoire est plus important.
    - ➢ Il existe un **ESSD** (Combat , Combat). C'est l'unique **EN** du jeu.

# Equilibre de Nash

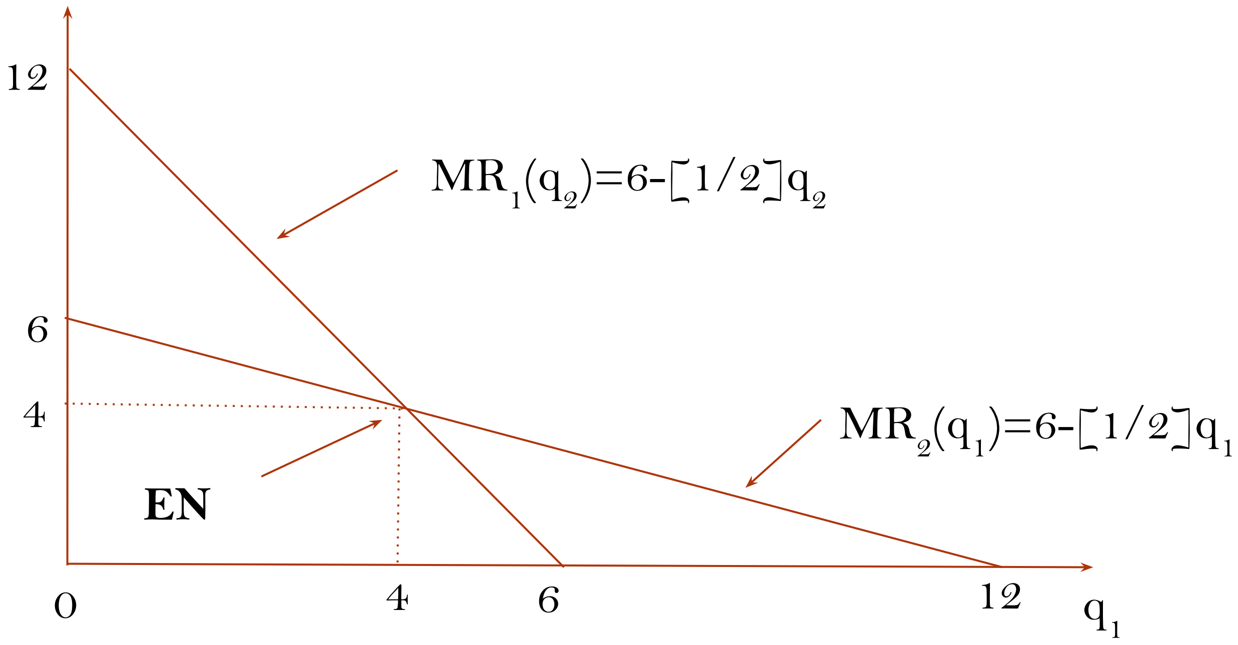
- **Exemple de jeu non-matriciel. Duopole de Cournot:**
  - Soit un marché où deux entreprises se font concurrence par les quantités.
  - La demande (inverse) est linéaire **p(q)=12-q**, et les coûts de production de chaque entreprise sont supposés identiques et normalisés à zéro: **c(q)=0** pour tout **q**.
  - Dans le duopole de Cournot, la variable stratégique du jeu est le niveau de production. Chaque entreprise détermine sa production comme une MR à la production de l'autre (fonctions de réaction).

# Equilibre de Nash

- **Exemple jeu non-matriciel. Duopole de Cournot:**
  - L'entreprise 1 choisit $q_1$ en considérant $q_2$ comme donnée: **Profit1** $= p(q).q_1 = [12-q_1-q_2]q_1$ et $q_1{}^* = MR_1(q_2) = 6-[1/2]q_2$
  - De même pour l'entreprise 2: **Profit 2** $= p(q).q_2 =[12-q_1-q_2]q_1$ et $q_{2*} = MR_2(q_1) = 6-[1/2]q_1$
  - A l'**EN**: $q_{1*} = MR_1(q_{2*})$ **et** $q_{2*} = MR_2(q_{1*})$
  - Il s'agit de déterminer un point fixe: $q_{1*}= MR_1(q_{2*}) = MR_1(MR_2(q_{1*}))$ soit $f(q_{1*}) = q_{1*}$.

# Equilibre de Nash

- **Exemple non-matriciel. Duopole de Cournot:**



# Equilibre de Nash

- **Exemple matriciel du duopole de Cournot (3 niveaux de production):**

| | | | $q_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | 6 | 4 | 3 |
| | 6 | 0 ; 0 | 12 ; 8 | 18 ; $\underline{9}$ |
| $q_1$ | 4 | 8 ; 12 | $\underline{16}$ ; $\underline{16}$ EN | $\underline{20}$ ; 15 |
| | 3 | $\underline{9}$ ; 18 | 15 ; $\underline{20}$ | 18 ; 18 |

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Enchères de Vickrey au second prix** (jeu non matriciel)
  - Un bien indivisible est mis en vente selon une procédure d'enchères à la Vickrey. Un nombre J d'enchérisseurs soumettent leur proposition sous pli cacheté. Le bien revient au plus offrant, mais celui-ci doit payer le prix donné par la deuxième meilleure enchère. En cas d'égalité, on tire le vainqueur au sort parmi ceux ayant proposé la meilleure enchère et le gagnant paye son enchère (premier et second prix identiques dans ce cas). On note $a_j$ l'enchère d'un participant j (sa stratégie) et $v_j$ la valeur qu'il attribue au bien (disposition maximale à payer ou prix de réserve).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Enchères de Vickrey au second prix** (solution)
  - $a_j = v_j$ c.à.d. enchérir à hauteur exacte de son évaluation (révéler son information privée) est une stratégie faiblement dominante.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Concours de beauté** (jeu non matriciel)
  - Vous participez au jeu suivant avec au moins un autre joueur. Chacun doit choisir de manière privée un nombre entier compris entre 1 et 100 (bornes incluses). Le(s) joueur(s) qui propose(nt) le nombre le plus proche de 70% de la moyenne des montants proposés remporte(nt) un lot. En cas d'égalité, le lot est partagé.

  - Quel serait votre choix?

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Contribution à un bien collectif** (jeu non matriciel)
  - Considérons J individus partageant un appartement (colocation). Ils disposent d'une même quantité de temps disponible, évaluée à T heures, qui peut être consacrée soit aux activités ménagères, soit à des activités récréatives. Les colocataires décident simultanément du temps $a_j$ qu'ils vont consacrer aux activités ménagères.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Contribution à un bien collectif** (jeu non matriciel)
  - Chaque individu apprécie de vivre dans un appartement propre et apprécie également les activités récréatives (ou n'aime pas faire le ménage). De plus, ces dernières sont d'autant plus agréables que l'appartement est propre. Les préférences des individus sont supposées identiques. La fonction d'utilité d'un colocataire j, lorsqu'il consacre $a_j$ heures aux activités ménagères, et donc $[T-a_j]$ heures aux activités récréatives, s' écrit :
    - $u_j(a_j,A) = A+[T-a_j]+[T-aj]A$, où $A=a_1+a_2+\ldots+a_J$ est le nombre total d'heures consacrées aux activités ménagères (déterminant la propreté de l'appartement).

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Contribution à un bien collectif** (solution)
  - La meilleure réponse de chaque colocataire est:
    - $a_j$=T-A.
  - Le nombre total d'heures consacrées au ménage à l'EN est:
    - $A^*$=T.J/(J+1).
  - Le nombre total de vache socialement optimal (qui maximise la somme des paiements des villageois) est:
    - $A^{**}$=(J(1+T)-1)/2.
  - Situation de type dilemme des prisonniers car $A^* < A^{**}$ et $u_j^* < u_j^{**}$. Il y a **sous-production de bien collectif**.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Exploitation d'une ressource commune** (jeu non matriciel)
  - Considérons J villageois identiques pouvant faire paître leurs vaches dans un champ communal (gratuitement accessible à chacun). Le nombre de vaches que chaque villageois choisit de posséder est noté aj. Ainsi, le nombre total de vaches dans le champ communal est $A=a_1+a_2+\ldots+a_J$. Le coût d'achat et d'entretien d'une vache est noté c. Le bénéfice par vache est donné par $B(A)=A^{max} - A$, si $A<A^{max}$ , et $B(A)=0$ si $A>A^{max}$, où $A^{max}$ représente la capacité d'accueil maximale du champ au-delà de laquelle le rendement est nul. On suppose $0<c<A^{max}$.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Exploitation d'une ressource commune** (solution)
  - La meilleure réponse de chaque villageois est:
    - $a_j = A^{max} - A - c$.
  - Le nombre total de vache à l'EN est:
    - $A^* = (A^{max} - c)J/(J+1)$.
  - Le nombre total de vache socialement optimal (qui maximise la somme des paiements des villageois) est:
    - $A^{**} = (A^{max} - c)/2$.
  - Situation de type dilemme des prisonniers car $A^* > A^{**}$ et $u_j^* < u_j^{**}$. Il y a **surexploitation de la ressource commune dans la situation de laisser faire**.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Paradoxe de Braess:**
  - Pour se déplacer d'un lieu A à un lieu D, 4000 automobilistes ont le choix entre deux itinéraires. Ces automobilistes cherchent à minimiser leur temps de parcours.
    1. A puis B puis D.
       - Le temps de parcours de A à B est (T/100) min, où T est le nbre d'usagers sur ce tronçon.
       - Le temps de parcours de B à D est de 45 min indépendamment du nombre d'usagers.
    2. A puis C puis D.
       - Le temps de parcours de A à C est de 45 min indépendamment du nombre d'usagers.
       - Le temps de parcours de C à D est (T/100) min, où T est le nbre d'usagers sur ce tronçon.

# Jeux sous forme stratégique et dominance

- **Paradoxe de Braess:**
  Un projet d'infrastructure consiste à construire une nouvelle route rapide reliant B à C. Pour simplifier, on suppose que le temps de parcours entre B et C est nul.

  Le temps de parcours à l'EN avant le projet est de 65 min. C'est également l'optimum social.

  Le temps de parcours à l'EN après le projet est de 80 min.

  Contrairement à ce que l'on pourrait croire, du fait des comportements stratégiques, accroître la taille du réseau n'est pas désirable.

# Partie 1: Jeux statiques

- Jeux sous forme stratégique et dominance
- Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées
- Equilibre de Nash
- **Stratégies mixtes**
- Jeux à somme nulle

# Stratégies mixtes

- Dans un jeu comme Pile ou Face, il est raisonnable de considérer que les joueurs disposent de stratégies supplémentaires, qui prennent la forme de **stratégies probabilisées** (dites **mixtes**).
  - En effet, les joueurs peuvent lancer leur pièce de monnaie et laisser le sort déterminer le choix entre pile ou face.
  - Cette stratégie mixte revient à joueur Pile avec une probabilité ½ et Face avec une probabilité ½. On peut noter cette stratégie ½P+½F, ou encore $\boldsymbol{\alpha}_j=(½,½)$ pour un joueur j.
  - Plus généralement, on peut considérer des stratégies mixtes plus complexes du type $\boldsymbol{\alpha}_j=(q,1-q)$ avec $q\in[0,1]$.

# Stratégies mixtes

- Pour un joueur j, une stratégie mixte $\boldsymbol{\alpha}_j$ est un **vecteur de probabilités** défini sur l'ensemble des stratégies possibles $\mathbf{A}_j$. Un élément $\alpha_j(a_j)$ de $\boldsymbol{\alpha}_j$ donne la probabilité de jouer l'action $a_j \in \mathbf{A}_j$ , et la somme des éléments de $\boldsymbol{\alpha}_j$ doit être égale à l'unité: $\sum_{aj} \alpha_j(a_j)=1$.
  - Une stratégie pure est une stratégie mixte dite **dégénérée**, ex. $\boldsymbol{\alpha}_j=(0,\ldots0,1,0,\ldots,0)$. Par la suite, nous inclurons les stratégies mixtes dans l'ensemble des stratégies possibles $\mathbf{A}_j$ (qui devient convexe et assure l'existence d'au moins un **EN** en stratégies mixtes).
    - Dans le jeu pile ou face, la stratégie mixte dégénérée $\boldsymbol{\alpha}_j=(1,0)$ est équivalente à la stratégie pure P. De même $\boldsymbol{\alpha}_j=(0,1)$ est équivalente à F.

# Stratégies mixtes

- Dans ce contexte, l'issue d'un jeu $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_J)$ est aléatoire et les paiements des joueurs sont des paiements espérés. Pour un joueur j, le paiement espéré obtenu en jouant une stratégie mixte $\boldsymbol{\alpha}_j$ face à des stratégies mixtes $\boldsymbol{\alpha}_{-j}$ des autres joueurs s'écrit:

$$U_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_{-j}) = \sum_{aj} \alpha_j(a_j) \times u_j(a_j, \boldsymbol{\alpha}_{-j})$$

- $U_j$ est une **fonction d'utilité von Neumann-Morgenstern**.

# Stratégies mixtes

- Comme $U_j$ est une fonction d'utilité vNM, les préférences des joueurs sont supposées vérifier **l'axiomatique de la théorie de l'espérance d'utilité**.

- En outre, le comportement des joueurs n'est plus invariant à **toute transformation croissante** des paiements de la forme:

$$v_j = f(u_j), \text{ où } f' > 0.$$

- Lorsque l'on considère les stratégies mixtes, le comportement des joueurs est seulement invariant à toute **transformation affine croissante** des paiements de la forme:

$$v_j = a.u_j + b, \text{ où a et b sont des constantes, et } a > 0.$$

# Stratégies mixtes

- **Exemple calcul des paiements en stratégies mixtes dans le jeu Pile ou Face:**

  - Calculer le paiement du joueur 1 lorsqu'il joue P et lorsqu'il joue F, face à $\boldsymbol{\alpha}_2 = (p_2, 1-p_2)$: $u_1(P,\boldsymbol{\alpha}_2) = \ldots$ et $u_1(F,\boldsymbol{\alpha}_2) = \ldots$

  - Calculer le paiement du joueur 1 lorsqu'il joue $\boldsymbol{\alpha}_1 = (p_1, 1-p_1)$ face à P et F: $u_1(\boldsymbol{\alpha}_1,P) = \ldots$ et $u_1(\boldsymbol{\alpha}_1,F) = \ldots$

  - Calculer également $u_2(P,\boldsymbol{\alpha}_1)$, $u_2(F,\boldsymbol{\alpha}_1)$, $u_2(\boldsymbol{\alpha}_2,P)$, $u_2(\boldsymbol{\alpha}_2,F)$ et finalement $u_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ et $u_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)$.

# Stratégies mixtes

- Sous quelle condition une stratégie mixte peut-elle être une MR? Nous avons besoin de la définition suivante pour y répondre clairement.
  - Au sein d'une stratégie mixte, les stratégies pures qui se voient attribuer une probabilité non-nulle constituent ce que l'on nomme le **support** de la stratégie mixte.

# Stratégies mixtes

- **Exemple. Support d’une stratégie mixte.**
- Si un joueur à trois stratégies pures disponibles, disons H, M et B, la stratégie mixte (⅓,⅔,0) a pour support H et M, tandis que (¾,0,¼) a pour support H et B, et (0,½,½) a pour support M et B, ou encore (½,¼,¼) a pour support H, M et B.
  - Noter également qu’une **stratégie mixte dégénérée** a une unique stratégie pure comme support (tout le poids de probabilité est concentré sur une unique stratégie pure).

# Stratégies mixtes

- **Théorème:**
  - Une stratégie mixte d'un joueur est une MR à une combinaison de stratégies des autres joueurs seulement si chaque stratégie pure inclue dans le support de la stratégie mixte du joueur est elle-même une MR à la combinaison de stratégies des autres joueurs.

  - Dans ce cas, toutes les stratégies mixtes possédant le même support seront également des MR et le joueur sera indifférent entre celles-ci.

# Stratégies mixtes

- **Exemple.**

**Joueur 2**

**Joueur 1**

|  | **G** | **C1** | **C2** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| **H** | 1 ; 0 | $\underline{4}$ ; 2 | $\underline{2}$ ; $\underline{4}$ | $\underline{3}$ ; 1 |
| **M** | 2 ; $\underline{4}$ | 2 ; 0 | $\underline{2}$ ; 2 | 2 ; 1 |
| **B** | $\underline{4}$ ; 2 | 1 ; $\underline{4}$ | $\underline{2}$ ; 0 | $\underline{3}$ ; 1 |

Toutes les stratégies mixtes $\boldsymbol{\alpha}_1 = (p_1, 0, 1-p_1)$ sont des MR à D. Toutes les stratégies mixtes $\boldsymbol{\alpha}_1 = (p_1, q_1, 1-p_1-q_1)$ sont des MR à C2. Mais seule la stratégie pure B est une MR à G et seule la stratégie pure H est une MR à C1.

# Stratégies mixtes

- On peut alors se demander pourquoi un joueur choisirait une stratégie mixte (complexe) alors qu'il obtiendrait exactement le même paiement en choisissant une stratégie pure (simple)?

- Nous allons voir qu'il existe au moins trois raisons.

# Stratégies mixtes

- **Raison 1: Une stratégie mixte peut dominer une stratégie pure** (alors que cette dernière n'est dominée par aucune autre stratégie pure).
- Dans l'exemple précédent, aucune stratégie de J1 n'est strictement dominée. Ni par une autre stratégie pure, ni par une stratégie mixte (car chaque stratégie de J1 est une MR à au moins une stratégie de J2).
- De plus, aucune stratégie de j2 n'est strictement dominée par une autre stratégie pure. Mais on peut remarquer que D n'est jamais une MR. Elle est notamment strictement dominée par $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$, ou par $pG+(1-p)C1$ avec $p \in ]\frac{1}{4},\frac{1}{2}[$.

# Stratégies mixtes

- Considérer les stratégies mixtes est sans conséquence pour le concept d'**ESSD**.

- Par contre, les possibilités d'élimination des stratégies strictement dominées augmentent lorsque l'on considère les stratégies mixtes. Ainsi, la recherche de l'**EEISSD** est affectée.

# Stratégies mixtes

- **Exemple. Domination par une stratégie mixte et EEISSD:**

**Joueur 2**

| | | G | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **Joueur 1** | **H** | 1 ; 0 | $\underline{6}$ ; 4 | 5 ; $\underline{10}$ |
| | **M** | 2 ; 1 | 2 ; $\underline{8}$ | 3 ; 0 |
| | **B** | $\underline{6}$ ; $\underline{5}$ | 2 ; 2 | $\underline{7}$ ; 0 |

- Aucune relation de dominance en stratégies pure, mais M n’est jamais une MR (à aucune stratégie pure de J2). On peut montrer M est strictement dominée par pH et (1-p)B, où $p \in \left]0,\frac{4}{5}\right[$.

# Stratégies mixtes

- Après avoir éliminé M, on obtient le jeu réduit suivant:

**Joueur 2**

| Joueur 1 | | G | C | D |
|---|---|---|---|---|
| | **H** | 1 ; 0 | $\underline{6}$ ; 4 | 5 ; $\underline{10}$ |
| | **B** | $\underline{6}$ ; $\underline{5}$ | 2 ; 2 | $\underline{7}$ ; 0 |

- C est maintenant strictement dominée par pG et (1-p)D, où p∈]⅖ ,⅗[. Finalement, B domine strictement H (car 6>1 et 7>5), puis G domine strictement D (car 5>0). **EEISSD**=(B,G). C'est également un **EN**, car tout **EEISSD** est un **EN** (mais la réciproque est fausse).

# Stratégies mixtes

- **Autre exemple. Domination par une stratégie mixte et EEISSD:**

| | | Joueur 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **G** | **C** | **D** |
| | **H** | 1 ; 3 | 8 ; 1 | 3 ; 8 |
| Joueur 1 | **M** | 0 ; 8 | 8 ; 2 | 5 ; 6 |
| | **B** | 3 ; 3 | 9 ; 8 | 2 ; 4 |

- Montrer que ce jeu admet un **EEISSD**=(B,C).

# Stratégies mixtes

- **Théorème:**
  - Une stratégie pure d'un joueur est strictement dominée si et seulement si cette stratégie n'est une MR à aucune combinaison de stratégies (pures ou mixtes) des autres joueurs.
  - Ainsi, **aucune croyance concernant le choix des autres ne peut rationaliser le choix d'une stratégie strictement dominée**, même si la relation de dominance est établie avec une stratégie mixte.

# Stratégies mixtes

- Ce théorème fournit un argument supplémentaire pour éliminer les stratégies pures strictement dominées par des stratégies mixtes.
- On peut en effet considérer qu'un joueur ne joue pas une stratégie strictement dominée car elle n'est une MR à aucune croyance possible concernant le choix des autres joueurs (plutôt que de considérer que le joueur va effectivement envisager de jouer une stratégie mixte complexe qui domine la stratégie pure).

# Stratégies mixtes

- **Remarques:**

  - Si une stratégie pure est strictement dominée, alors on sait qu’elle n’est une MR à aucune stratégie pure des autres joueurs. Ceci permet d’identifier les stratégies pures candidates à l’ élimination (CN pour être strictement dominée).

  - Mais une stratégie pure d’un joueur qui n’est une MR à aucune combinaison de stratégies pures des autres joueurs n’est pas nécessairement strictement dominée car elle peut être une MR à certaines combinaisons de stratégie mixtes des autres joueurs (pas CS).

# Stratégies mixtes

- **Exemple.**

|  |  | Joueur 2 |  |
|---|---|---|---|
|  |  | **G** | **D** |
| **Joueur 1** | **H** | $\underline{2}$ ; 1 | 0 ; 6 |
|  | **M** | 0 ; 3 | $\underline{2}$ ; 0 |
|  | **B** | 1 ; 2 | 1 ; 1 |

- **B** n'est une MR à aucune stratégie pure du J2. Mais **B** n'est pas strictement dominée. En effet, **B** est une MR à ½ **G**+½ **D**.

# Stratégies mixtes

- **Raison 2: Une stratégie mixte permet de bluffer.**
- Dans un jeu compétitif, si les autres joueurs anticipent votre stratégie pure, ils vont typiquement adopter des stratégies qui minimisent votre paiement (pour gagner à votre place).
- Mais ce n'est pas le cas avec une stratégie mixte. Même si celle-ci est connue des autres joueurs, elle peut vous garantir un paiement plus fort par rapport au cas où votre stratégie pure est connue.
- On le comprend aisément dans le cas des tirs au but au football. De même dans le jeu Pile ou Face. La stratégie mixte ½P+½F garantit un paiement de 0 quel que soit le choix de l'autre (tandis que P ou F peuvent donner -1).

# Stratégies mixtes

- Dans le cas des tirs au but au football ou dans le jeu Pile ou Face. La stratégie mixte $\boldsymbol{\alpha}_j = (½,½)$ garantit un paiement de 0 quel que soit le choix de l'autre (tandis que G ou D peuvent donner -1).

| | | Tireur | |
|---|---|---|---|
| | | G | D |
| Gardien | G | 1 ; -1 | -1 ; 1 |
| | D | -1 ; 1 | 1 ; -1 |

# Stratégies mixtes

- **Raison 3: Si l'on écarte l'usage des stratégies mixtes en considérant uniquement les stratégies pures, alors l'existence de l'EN n'est plus garantie** (l'ensemble des stratégies pures des joueurs n'est pas convexe et les fonctions de MR des joueurs peuvent ne pas se croiser, comme dans le jeu Pile ou Face).

# Stratégies mixtes

- **Exemple. EN en stratégies mixtes. Pile ou face:**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | P | F |
| Joueur 1 | P | $\underline{1}$ ; -1 | -1 ; $\underline{1}$ |
| | F | -1 ; $\underline{1}$ | $\underline{1}$ ; -1 |

Un **EN** en stratégies mixtes ($\boldsymbol{\alpha}_1$; $\boldsymbol{\alpha}_2$)=((½,½);(½,½)). C'est le seul **EN** du jeu.

# Stratégies mixtes

- **Exemple. EN en stratégies mixtes. Bataille des sexes:**

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | **A** | **B** |
| Joueur 1 | **A** | $\underline{2}$ ; $\underline{1}$ | 0 ; 0 |
| | **B** | 0 ; 0 | $\underline{1}$ ; $\underline{2}$ |

- Un **EN** en stratégies mixtes $(\boldsymbol{\alpha}_1; \boldsymbol{\alpha}_2)=((\frac{2}{3},\frac{1}{3});(\frac{1}{3},\frac{2}{3}))$.

# Stratégies mixtes

- **Remarque. EN** en stratégies mixtes lorsque les joueurs ont **plus de deux stratégies pures**:

**Joueur 2**

| | | **G** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| | **H** | $\underline{3}$ ; 0 | 0 ; 0 | 0 ; $\underline{3}$ |
| **Joueur 1** | **M** | 0 ; 0 | $\underline{1}$ ; $\underline{1}$ EN | 0 ; 0 |
| | **B** | 0 ; $\underline{3}$ | 0 ; 0 | $\underline{3}$ ; 0 |

Ce jeu admet deux **EN** en stratégies mixtes $(\boldsymbol{\alpha}_1; \boldsymbol{\alpha}_2)=\{(1/5,3/5,1/5),(1/5,3/5,1/5)\}$ et $(\boldsymbol{\alpha}_1; \boldsymbol{\alpha}_2)=\{(1/2,0,\ 1/2),\ (1/2,0,\ 1/2)\}$.

# Stratégies mixtes

- **Remarque. Interprétations des stratégies mixtes:**
  - **Objet de choix** (au sens littéral).
  - **Croyances des joueurs** (stratégie mixte d'un joueur = croyance des autres) concernant des fréquences ou proportions de choix de stratégies pures dans la population des joueurs.

# Stratégies mixtes

- **Purification des stratégies mixtes d'Harsanyi:** L'**EN** en stratégies mixtes dans un jeu statique à info complète correspond à un **ENB** (**bayésien**) en stratégies pures dans une version perturbée du jeu qui est à info incomplète.

  - Des variations aléatoires (extérieures au jeu) affectent les paiements des joueurs et reste une information privée (seule la distribution des aléas est connue par les joueurs). Lorsque les variations sont faibles, l'**ENB** en stratégies pures du jeu à info incomplète converge vers l'**EN** en stratégies mixtes du jeu à info complète.

# Partie 1: Jeux statiques

- Jeux sous forme stratégique et dominance
- Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées
- Equilibre de Nash
- Stratégies mixtes
- **Jeux à somme nulle**

## Jeux à somme nulle

- **Définition d'un jeu à somme nulle:**

Un jeu à deux joueurs est à **somme nulle** lorsque la somme des paiements des joueurs est nulle quelle que soit l'issue du jeu:

$U_1 (\alpha_1 ,\alpha_2) = - U_2 (\alpha_2 ,\alpha_1)$, pour tout $\alpha_1 \in A_1$ et $\alpha_2 \in A_2$

Comme les intérêts des joueurs y sont diamétralement opposés, on qualifie également les jeux à somme nulle de **jeux strictement compétitifs**.

# Jeux à somme nulle

- **Exemple. Jeu à somme nulle.**

| | | Joueur 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **G** | **C** | **D** |
| | **H** | 5 ; -5 | 8 ; -8 | $\underline{4}$ ; $\underline{-4}$ |
| Joueur 1 | **M** | -7 ; $\underline{7}$ | $\underline{9}$ ; -9 | 0 ; 0 |
| | **B** | $\underline{9}$ ; -9 | 1 ; -1 | -2 ; $\underline{2}$ |

# Jeux à somme nulle

- **Remarque:**
  - Un **jeu à somme constante** est équivalent à un jeu à somme nulle.
    - En effet, en déduisant cette somme constante des paiements de l'un des joueurs à chaque issue, on obtient un jeu à somme nulle.

# Jeux à somme nulle

- **Exemple jeu à somme constante. Jeu de squash.**

| | | J2 | |
|---|---|---|---|
| | | **En avant** | **En arrière** |
| **J1** | **Amorti** | 20% ; 80% | 70% ; 30% |
| | **Fort** | 90% ; 10% | 30% ; 70% |

# Jeux à somme nulle

- **Exemple. Jeu de squash (on retire la somme constante de 100% au Joueur 1):**

| | | J2 | |
|---|---|---|---|
| | | **En avant** | **En arrère** |
| J1 | **Amorti** | -80% ; 80% | -30% ; 30% |
| | **Fort** | -10% ; 10% | -70% ; 70% |

  - Le comportement du J1 reste le même.

# Jeux à somme nulle

- **Remarque:**
  - On peut considérer des **jeux à somme nulle à plus de deux joueurs** mais leur analyse est plus complexe (l'hypothèse de somme nulle n'est plus suffisante pour obtenir des résultats généraux).

## Jeux à somme nulle

- Dans un jeu à somme nulle, jouer une **stratégie prudente** ne contredit pas l'hypothèse de **connaissance commune de la rationalité**.
- En effet, lorsque l'on cherche à se garantir un paiement minimum le plus élevé possible (**MaxiMin**), on commence par envisager chaque stratégie dans le pire des cas possibles, comme si l'autre joueur cherchait à minimiser votre paiement.
- Dans un jeu à somme nulle, c'est attribuer un comportement tout à fait rationnel à l'autre joueur (car minimiser le paiement de J1 revient à maximiser le paiement de J2, et inversement).

# Jeux à somme nulle

- On peut considérer deux types de stratégies:

1. **MaxiMin** (se garantir un paiement minimum):

$s_1 = \mathrm{Max}_{\alpha 1}\mathrm{Min}_{a2}U_1(\alpha_1 ,a_2)$ et $s_2 = \mathrm{Max}_{\alpha 2}\mathrm{Min}_{a1}U_1(\alpha_1 ,a_2)$

2. **MiniMax** (tenter un paiement maximum)

$v_1 = \mathrm{Min}_{\alpha 2}\mathrm{Max}_{a1}U_1 (a_1 ,\alpha_2)$ et $v_2 = \mathrm{Min}_{\alpha 1}\mathrm{Max}_{a2}U_2(a_2 ,\alpha_1)$

- Cherchons ces paiements et les stratégies associées dans les jeux précédents.

# Jeux à somme nulle

- Lorsque les paiements **Maximin** et **MiniMax** obtenus en stratégies pures sont **identiques**, la stratégie prudente du joueur est une **stratégie pure**.

- Lorsque les paiements **Maximin** et **MiniMax** obtenus en stratégies pures sont **différents**, la stratégie prudente du joueur est une **stratégie mixte**. Le joueur peut en effet se garantir un paiement espéré plus fort en jouant une stratégie mixte.

# Jeux à somme nulle

- Remarques:
  - **MaxiMin** J1 = -**MiniMax** J2, soit $s_1=-v_2$.
  - **MiniMax** J1 = -**MaxiMin** J2, soit $v_1=-s_2$.
  - **MaxiMin** Jj **≤** **MiniMax** Jj, soit $s_j \leq v_j$.

  - Lorsque l'on considère les stratégies mixtes: **MaxiMin** J1 = **MiniMax** J1 = -**MaxiMin** J2= -**MiniMax** J2 = **Valeur du jeu**, soit $s_1=v_1=-s_2=-v_2=V$.

# Jeux à somme nulle

- **Autre exemple. Jeu à somme nulle.**

| | | Joueur 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **G** | **C** | **D** |
| Joueur 1 | **H** | 3 ; -3 | 2 ; -2 | 7 ; -7 |
| | **M** | -4 ; 4 | 1 ; -1 | 9 ; -9 |
| | **B** | 1 ; -1 | 0 ; 0 | -3 ; 3 |

- Stratégies prudentes pures H et C avec $s_1=v_1=-s_2=-v_2=V=2$.

# Jeux à somme nulle

- **Remarque**:
  - vNM ont montré que tout jeu fini et à somme nulle à une valeur (ce qui revient à démontrer l'existence d'au moins un **EN** en stratégies mixtes car la combinaison des stratégies prudentes forme toujours un **EN** dans les jeux à somme nulle).

# Jeux à somme nulle

- Par exemple, dans le jeu Pile ou Face, la stratégie prudente des joueurs est $\boldsymbol{\alpha}_j=(½,½)$.

- En stratégies pures on a s1=-v2=-1 et v1=-s2=1. Comme le Maximin est différent du MiniMax, on sait que la stratégie prudente est en fait mixte.

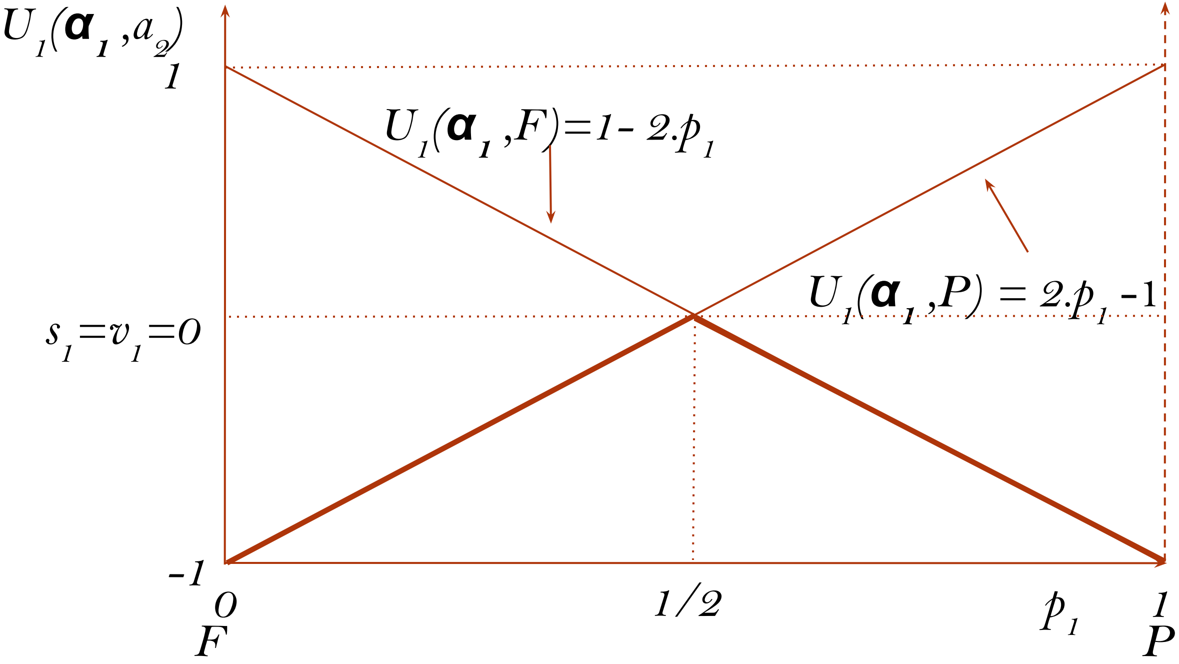
- Voyons comment trouver la **stratégie prudente mixte**.

# Jeux à somme nulle

- **Stratégie prudente dans le jeu Pile ou face**:
  - La matrice des paiements n'admet pas de **point selle**. En stratégies pures, $s_j$=-1 et $v_j$=1 pour j=1,2.
  - Considérons le joueur 1. Soit $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}=(\alpha_1(P),\ \alpha_1(F))=(p_1\ ,1-\ p_1)$ une stratégie mixte du joueur 1.
  - On peut calculer le paiement espéré associé à cette stratégie mixte face à chacune des stratégies du joueur 2: $U_1(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}\ ,P) = 2.p_1 -1$ et $U_1(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}\ ,F)=1-\ 2.p_1$. On trouve alors aisément la stratégie mixte prudente de J1 en raisonnant graphiquement.
  - Pour chaque joueur, la stratégie mixte $\boldsymbol{\alpha}_j$ = (½, ½) est une stratégie prudente. La valeur de ce jeu est V=0.

# Jeux à somme nulle

- **Stratégie mixte prudente de J1 dans le jeu Pile ou face:**



# Jeux à somme nulle

- **Remarque**:
  - Le raisonnement graphique précédent repose sur l'idée de MaxiMin (se garantir un paiement minimum).
  - Comme MaxiMin et MiniMax sont égaux lorsque l'on considère les stratégies mixtes, on peut obtenir exactement le même résultat en raisonnant en termes de MiniMax.
  - Pour J1 par exemple, il faut alors représenter $U_1(P, \boldsymbol{\alpha}_2)$ et $U_1(F, \boldsymbol{\alpha}_2)$, i.e. avec la probabilité $p_2$ en abscisse.