Cours d'Algèbre I du Master 1 de Mathématiques Fondamentales

Algèbre I (8 ECTS, 27 HCM, 27 HTD) :

Prérequis : le contenu des deux cours de L3 « Groupes et anneaux 1 » et «Groupes et anneaux 2 ».

Objectifs : maîtriser des notions de base de la théorie des modules et de la théorie des représentations.

Programme :

0. Rappels de Licence sur les anneaux (intègres, factoriels, principaux, euclidiens, corps). Compléments : existence d'idéaux maximaux via le lemme de Zorn. Notion d'élément nilpotent, nilradical.

1. Modules sur un anneau : notions de module, d'algèbre sur un anneau ; morphismes, Restriction des scalaires. Théorèmes de factorisation et d'isomorphisme. (Sous-)Module de torsion, module libre, module de type fini. Notion de rang. Suite exactes courtes de modules, extensions de modules. Produit et somme directe. Produit tensoriel sur un corps, puis sur un anneau commutatif quelconque; isomorphisme (en dimension finie) entre Hom(E,F) et $E^* \otimes F$.

L'enseignant pourra, en complément de ces notions, introduire celles de produit extérieur, produit symétrique, défaut d'exactitude du produit tensoriel, module projectif (exemples non exhaustifs).

2. Structure des modules de type fini sur un anneau principal. Application aux groupes abéliens, application à la réduction des homomorphismes. Forme normale de Smith, invariants de similitude.

3. Représentations des groupes finis : notion de représentations linéaire d'un groupe, de morphisme entre représentations. Les représentations comme modules sur l'algèbre du groupe. Sous-représentation, représentation irréductible. Somme directe, produit tensoriel de représentations. Complète réductibilité. Lemme de Schur. Caractères, tables de caractères, orthogonalité des caractères. La décomposition de la représentation régulière. Exemples : groupes abéliens, groupes diédraux, groupes symétriques.