

Outils mathématiques 1 — TD 1 : Géométrie dans le plan

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2; 1)$, $B(2; 4)$, $C(4; -1)$ et $D(1; -3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$.

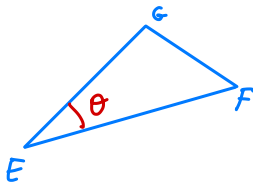
1.2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{CD}$.

1.3 Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont-ils orthogonaux? Les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$ sont-ils orthogonaux?

→ calculer θ au signe près.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

θ sup)



$\theta = ?$ au signe près

$$1.1. \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 & +2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 & +2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1.2. \vec{u} &= 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{CD} \\ &= 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8-18-3 \\ 6+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3. $\vec{AB} \perp \vec{AD}$?

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AD}$

$$\vec{BC} \perp \vec{CD} ? \quad \vec{BC} \cdot \vec{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -6 + 10 = 4 \neq 0$$

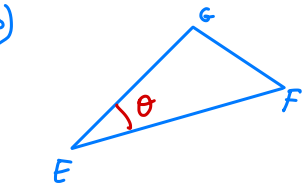
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CD} = \|\vec{BC}\| \cdot \|\vec{CD}\| \cos \theta$$

$$4 = \sqrt{29} \sqrt{13} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{\sqrt{29} \sqrt{13}} \approx 0.206$$

$$\Rightarrow \theta = \pm \arccos(0.206) = \pm 78.1^\circ$$

$\varphi \text{ sup}$



$\theta = ?$ au signe près

$\hat{j} \uparrow \hat{i}$

$$\vec{EF} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{EG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{EF} \cdot \vec{EG} = 36$$

$$\|\vec{EF}\| = \sqrt{53} \quad \|\vec{EG}\| = \sqrt{32}$$

$$\cos \theta = \frac{36}{\sqrt{53} \sqrt{32}} = 0,874 \Rightarrow \theta = \pm \arccos(0,874) = \pm 29,1^\circ$$

Outils mathématiques 1 — Première semaine

Trigonométrie

1.1 Rappeler les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

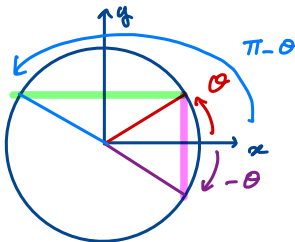
1.2 Établir les formules de $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ ainsi que de $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.

1.3 Que permet d'écrire le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique?

1.4 Simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

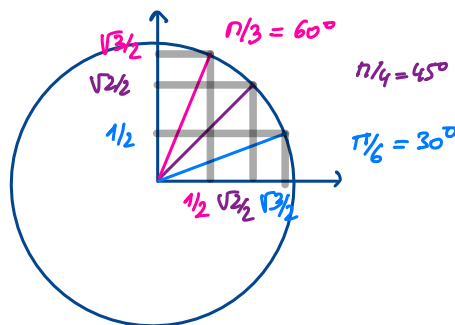
1.5 Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Trigonométrie :



$$\cos \theta = \cos(-\theta)$$

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$$



Grand angle $\rightarrow$ grand sinus $\rightarrow$ petit cosinus.

1.1

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

1.2 $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos(-b) + \sin(-b) \cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

1.3 $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

1.4 $\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \end{array} \right.$

$$e^A \times e^B = e^{A+B} = \exp(A+B)$$

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(a+b) + i \sin(a+b) &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= \cos a \cos b + i \sin a \cos b + \cos a i \sin b + i^2 \sin a \sin b \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b) \end{aligned}$$

1.5

Question: Calcul de $\cos(\pi/12)$

$$\frac{\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

1.6 Résoudre $\sin(2x) = \cos(x)$.

1.7 "Linéariser" $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$

1.8 Calculer la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1.6. Résoudre $\sin(2x) = \cos(x)$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \pmod{2\pi} & (1) \\ \text{ou} \\ a = \pi - b \pmod{2\pi} & (2) \end{cases}$$

$$\theta + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \pmod{2\pi}$$

↑
se diriger comme l'angle

$$(1) \quad 2x = \frac{\pi}{2} - x \pmod{2\pi}$$

$$3x = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{2\pi}{3}}$$

$$(2) \quad 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \pmod{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} + x \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

$$S: \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \\ x = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$S = \left\{ x / x = \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \right\} \cup \left\{ x / x = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \right\}$$

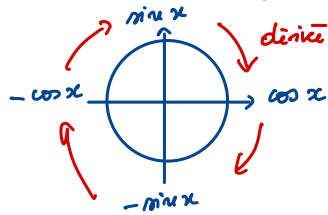
Rq: Je peux aussi faire $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = x \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - 2x = -x \pmod{2\pi}$$

→ mêmes équations.

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b \end{cases}$$


1.7. Primitives $\cos(2x) : \frac{1}{2} \sin(2x) + k \in \mathbb{R}$

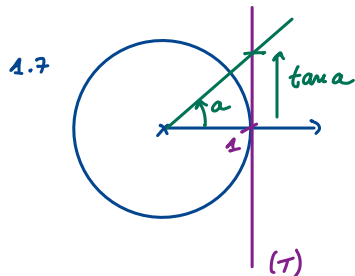


Primitives de $\cos^2 x$ $\left(\begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} \right)$

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \end{cases}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$



$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin \pi/12}{\cos \pi/12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \times \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{4} \\ &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Exponentielles et logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

2.1 $e^2 \cdot e^3$; e^4/e^2 ; $(e^{2x})^3$; $\exp(2x) \cdot \exp(-x)$

2.2 $\ln(x) + \ln(2)$; $\ln(4x)$; $\ln(x^3)$; $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2.3 $\exp(\ln(x))$; $\exp(-\ln(x))$; $\exp(x \ln(x))$

$$2.1. \quad e^2 \cdot e^3 = e^5 = \exp(2) \exp(3) = \exp(5)$$

$$\frac{e^4}{e^2} = e^{4-2} = e^2$$

$$(e^{2x})^3 = e^{3 \times 2x} = e^{6x}$$

$$\exp(2x) \exp(-x) = e^{2x} \cdot e^{-x} = \exp(x)$$

$$2.2 \quad \underbrace{e^{\ln x}}_{x > 0} = x \quad \ln e^x = x$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b.$$

$$\ln x + \ln 2 = \ln(2x)$$

$$\ln(4x) = \ln 4 + \ln x$$

$$\ln(x^3) = 3 \ln(x) \quad \ln(a^b) = b \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = -\ln(x)$$

$$2.3. \quad e^{\ln x} = x$$

$$\exp(-\ln x) = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

$$\exp(x \ln x) = (e^{\ln x})^x = x^x \quad \text{si } x > 0$$

$$2.4) \quad \ln(x e^x) = \ln x + \ln e^x = \ln x + x.$$

Systèmes d'équations

4.1 Résoudre les systèmes d'équations suivants à la calculatrice

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \quad (S1)$$

$$\begin{cases} \frac{7}{13}x + \frac{11}{17}y = \frac{5}{19} \\ \frac{23}{29}x - \frac{31}{37}y = -\frac{41}{43} \end{cases} \quad (S2)$$

Table des logarithmes décimaux entre 1 et 100

N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
1	0	21	1,322 22	41	1,612 78	61	1,785 33
2	0,301 03	22	1,342 42	42	1,623 25	62	1,792 39
3	0,477 12	23	1,361 73	43	1,633 47	63	1,799 34
4	0,602 06	24	1,380 21	44	1,643 45	64	1,806 18
5	0,698 97	25	1,397 94	45	1,653 21	65	1,812 91
6	0,778 15	26	1,414 97	46	1,662 76	66	1,819 54
7	0,845 1	27	1,431 36	47	1,672 1	67	1,826 07
8	0,903 09	28	1,447 16	48	1,681 24	68	1,832 51
9	0,954 24	29	1,462 4	49	1,690 2	69	1,838 85
10	1	30	1,477 12	50	1,698 97	70	1,845 1
11	1,041 39	31	1,491 36	51	1,707 57	71	1,851 26
12	1,079 18	32	1,505 15	52	1,716	72	1,857 33
13	1,113 94	33	1,518 51	53	1,724 28	73	1,863 32
14	1,146 13	34	1,531 48	54	1,732 39	74	1,869 23
15	1,176 09	35	1,544 07	55	1,740 36	75	1,875 06
16	1,204 12	36	1,556 3	56	1,748 19	76	1,880 81
17	1,230 45	37	1,568 2	57	1,755 87	77	1,886 49
18	1,255 27	38	1,579 78	58	1,763 43	78	1,892 09
19	1,278 75	39	1,591 06	59	1,770 85	79	1,897 63
20	1,301 03	40	1,602 06	60	1,778 15	80	1,903 09
						81	1,908 49
						82	1,913 81
						83	1,919 08
						84	1,924 28
						85	1,929 42
						86	1,934 5
						87	1,939 52
						88	1,944 48
						89	1,949 39
						90	1,954 24
						91	1,959 04
						92	1,963 79
						93	1,968 48
						94	1,973 13
						95	1,977 72
						96	1,982 27
						97	1,986 77
						98	1,991 23
						99	1,995 64
						100	2

$$(S_1): \quad \begin{aligned} x &= 4/7 \\ y &= 9/7 \end{aligned}$$

NUMWORKS		
rad EQUATIONS Solution		
x	$-\frac{38\,406\,498}{93\,413\,329} \approx -0.412$	
y	$\frac{69\,951\,719}{93\,413\,329} \approx 0.748$	

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ -x + 4y - z = 2 \end{cases} \quad (S_3)$$

NUMWORKS		
rad EQUATIONS Solution		
x	$-\frac{12}{5} = -2.4$	
y	$\frac{8}{5} = 1.6$	
z	$\frac{34}{5} = 6.8$	

Trinôme du second degré

3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$- 3x^2 - 4x + 1 = 0;$$

$$- 2x^2 - 2x + 0 = 0$$

$$2x^2 - 2x + 4 = 0$$

3.2 Factoriser

$$- P(x) = x^2 - 3x - 4;$$

$$- Q(x) = x^2 + 4x - 21$$

$$* \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = d^2$$

$$x_1 = \frac{-b-d}{2a} \quad x_2 = \frac{-b+d}{2a}$$

* Soit P polynôme de degré n

P admet n racines dans $\mathbb{C}$.

* Soit P de degré 4

$$P = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) a$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 = 2^2$$

$$x = \frac{+4 \pm 2}{2 \times 3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

$$2x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times 2 = -28 = (i\sqrt{28})^2 = (2i\sqrt{7})^2$$

$$\uparrow$$

$$i / i^2 = -1$$

$$x_1 = \frac{+2 - 2i\sqrt{7}}{4} = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$$

} conjugués

$$P(x) = x^2 - 3x - 4 = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Je pose } x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = 25 = 5^2 \Rightarrow x_1 = \frac{+3-5}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{+3+5}{2} = 4$$

$$P(x) = (x+1)(x-4)$$

$$Q(x) = x^2 + 4x - 21 \stackrel{\text{eq.}}{=} 0$$

$$\Delta = 100 = 10^2$$

$$x_1 = \frac{-4-10}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-4+10}{2} = 3$$

$$\Rightarrow Q(x) = (x+7)(x-3)$$

Intégrales

$$\text{Intégrer } \int_0^1 (x^2 - 1) dx \text{ et } \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 x^2 - 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + 0 \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - (0 - 0) = -2/3$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx$$

(1.7)

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Outils mathématiques 1 — TD 1 : Géométrie dans le plan

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2; 1)$, $B(2; 4)$, $C(4; -1)$ et $D(1; -3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$.

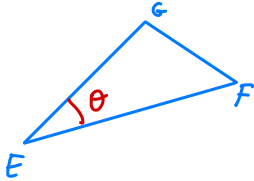
1.2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{CD}$.

1.3 Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont-ils orthogonaux? Les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$ sont-ils orthogonaux?

→ calculer θ au signe près.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

θ sup)



$\theta = ?$ au signe près

$$1.1. \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 & +2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 & +2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$1.2. \vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{CD} \\ = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 8-18-3 \\ 6+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1.3. $\vec{AB} \perp \vec{AD}$?

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0 \\ \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{AD}$$

$$\vec{BC} \perp \vec{CD} ? \quad \vec{BC} \cdot \vec{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -6 + 10 = 4 \neq 0$$

1.4 Calculer les normes des vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AC}$.

1.5 Calculer le produit scalaire $s = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$ et en déduire au signe près la valeur de l'angle $\theta = (\vec{AC}, \vec{AD})$.

1.6 Déterminer le signe de θ ainsi que la surface du triangle ACD à l'aide du déterminant.

$$1.4. \|\vec{AD}\| = \sqrt{9 + 16} = 5 \\ \|\vec{AC}\| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$$

1.5.

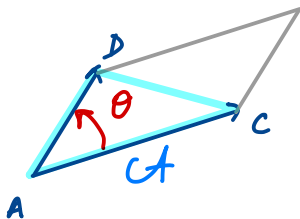
$$s = \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \cos \theta = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$$

$$= 5 \times 2\sqrt{10} \cdot \cos \theta = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 26$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{26}{5 \times 2\sqrt{10}} = 0,822$$

$$\Rightarrow \theta = \pm 34,7^\circ$$

1.6



$$ct = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AC}; \vec{AD}) \right|$$

$$\det(\vec{AC}; \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -18$$

$$= 6 \times (-4) - (-2) \times 3$$

$$= -24 + 6 = -18$$

$$ct = \frac{18}{2} = 9 \text{ uA}$$

$$\det(\vec{AC}; \vec{AD}) < 0 \Leftrightarrow \theta < 0$$

$$\Rightarrow \theta = -34,7^\circ$$

(ACD) est indirect ou inverse ↻

2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.

2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

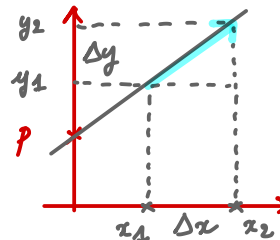
(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :

(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0,5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

Rappel: $y = mx + p$

Pour $x=0 \Rightarrow y=p$.



$$y_2 = mx_2 + p$$

$$y_1 = mx_1 + p$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

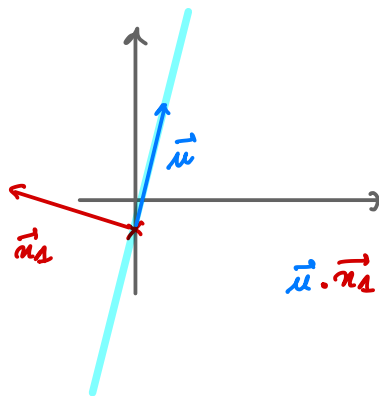
$$\Delta y = m \Delta x$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\vec{u} = (\Delta x; \Delta y) = (\Delta x; m \Delta x)$$

$$\text{Pour } \Delta x = 1 \Rightarrow \vec{u} = (1; m) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

Ex: $y = 4x - 1$



$$\vec{n}_1 = (-m; 4)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -m \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (-m; 4)$$

2.2. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ forme canonique

$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.3. $\vec{u} = (1; m)$ $\vec{u}' = (1; m')$

$$\vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + mm' = 0 \Rightarrow mm' = -1$$

1a) $\vec{u} = (1; 2)$ $\vec{n} = (2; -1)$

1b) $\rightarrow$ (ii) $\text{Ex } (0,5) = -1$

$$\vec{u}_2 = (1; -0,5) \quad \vec{u} \cdot \vec{u}_2 = 0.$$

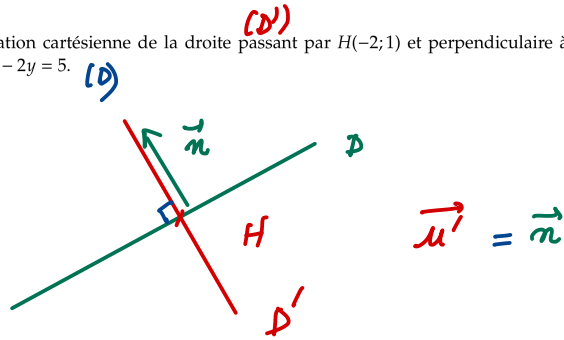
2. Droites et cercles du plan

- 2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.
 2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.
 2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :
 (a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;
 (b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :
 (i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0,5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.1 et 2.2 $\rightarrow$ lectures directes

2.1 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.4 Donner l'équation cartésienne de la droite passant par $H(-2;1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$.



Stratégie:

- ① $\vec{n}$
- ② $\vec{n} = \vec{u}'$
- ③ $\vec{u}' \Rightarrow \vec{n}'$
- ④ Eq. incomplète
- ⑤ $H \rightarrow$ compléter l'éq.

$$\vec{n} = (1; -2) = \vec{u}' \Rightarrow \vec{n}' = (2; 1)$$

$$\Rightarrow D': 2x + y + c = 0$$

$$H \in D' \Leftrightarrow 2x(-2) + 1 + c = 0 \Rightarrow -3 + c = 0$$

$$\Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow D': 2x + y + 3 = 0$$

Autre méthode: $D' = \{M(x;y) / \vec{HM} \perp \vec{u}\}$

$$\vec{HM} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{HM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{HM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x+2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$2x + 4 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x + y + 3 = 0}$$

Autre Méthode: $D' = \{M(x;y) / \vec{HM} \parallel \vec{n}\}$

$$\vec{HM} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \det(\vec{HM}; \vec{n}) = 0$$

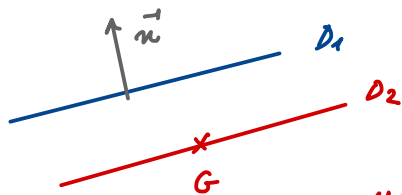
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{eq.}}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 4 - y + 1 = 0$$

$$\boxed{-2x - y - 3 = 0}$$

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2; -3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x + 3$.

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2; -3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x + 3$.



$$y = -2x + p$$

$$\Rightarrow -3 = -2 \times 2 + p \Rightarrow p = 1$$

$$y = -2x + 1$$

$$D': \quad \Pi / \vec{GN} \perp \vec{n} \quad \vec{GN} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{GN} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 + y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$$

2.6 Déterminer les intersections deux à deux des droites suivantes :

- D_1 d'équation : $2x + y - 3 = 0$
- D_2 passant par $A(0; 3)$ et $B(3; 5)$
- D_3 d'équation : $4x - y = 6$

$$I_{13} = D_1 \cap D_3$$

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (1) \\ 4x - y - 6 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \quad \underline{6x - 9 = 0} \Rightarrow x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$(1) \Rightarrow 3 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 0 \quad I_{13} = \left(\frac{3}{2}; 0 \right)$$

$$(D_2) \quad \underline{2x - 3y + 9 = 0}$$

Je décide d'($x; y$) tel que $\vec{AN} \parallel \vec{AB}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{AN} = \begin{pmatrix} x \\ y - 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{AB}; \vec{AN}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & x \\ 2 & y-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3y - 9 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{2x - 3y + 9 = 0}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (1) \\ 2x - 3y + 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \\ \Rightarrow x = 0.$$

$$I_{12}(0; 3)$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0 & (2) \\ 4x - y - 6 = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2,7 \\ y = 4,8 \end{cases}$$

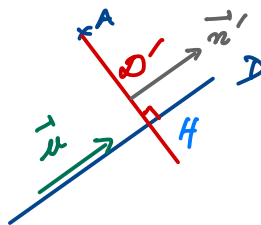
$$I_{23}(2,7; 4,8)$$

- 2.7 Déterminer la projection orthogonale de $A(5; -2)$ sur la droite D d'équation $y = -3x + 4$.
- 2.8 Donner une mesure de l'angle θ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x; y) / y = 3x + 2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x; y) / x - 4y + 12 = 0\}$.
- 2.9 Déterminer l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $C(1; -4)$ et de rayon 7.
- 2.10 Parmi les trois équations suivantes, lesquelles sont des équations de cercles :

$$a) (x-3)^2 + (y+1)^2 = 2 \quad ; \quad b) x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \quad ; \quad c) x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$$

- 2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1; 1)$ et $B(0; -1)$ et du cercle de centre $C(2; 0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB , ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

2.7



① $D' \perp D$ $A \in D' \rightarrow$ Equation de D'

② $H \in D$ et $H \in D' \rightarrow$ Système

$$D': x - 3y - 11 = 0.$$

$$\vec{u} = (1; -3) = \vec{n}'$$

$$\Rightarrow D': x - 3y + c = 0$$

$$A \in D': 5 + 6 + c = 0 \Rightarrow c = -11 \quad \text{😊}$$

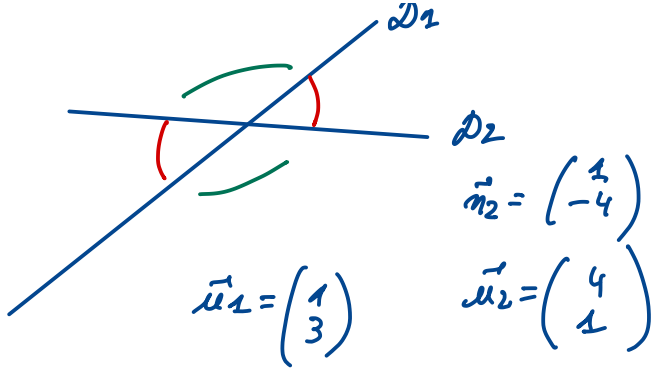
$$\begin{cases} 3x + y = 4 & (1) \\ x - 3y = 11 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x = 11 + 3y \Rightarrow 3(11 + 3y) + y = 4$$

$$\Rightarrow 33 + 9y + y = 4 \Rightarrow 10y = -29 \Rightarrow y = -2,9$$

$$(2) \Rightarrow x = 11 - 3 \times 2,9 = 2,3 \Rightarrow x(2,3; -2,9)$$

- 2.8 Donner une mesure de l'angle θ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x; y) / y = 3x + 2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x; y) / x - 4y + 12 = 0\}$.



$$\cos \theta = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|} = \frac{7}{\sqrt{10} \sqrt{17}} = 0,537$$

$$\Rightarrow \theta = \pm 57,5^\circ$$

(ou $\pm 123^\circ$ selon le choix de u_1 et u_2)

- 2.9 Déterminer l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $C(1; -4)$ et de rayon 7.

$$2.9. \quad (x-1)^2 + (y+4)^2 = 49$$

- 2.10 Parmi les trois équations suivantes, lesquelles sont des équations de cercles :

a) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$; b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$

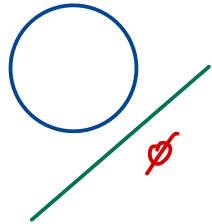
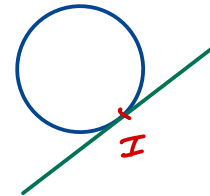
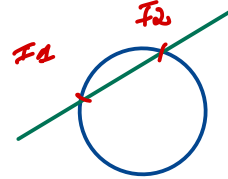
$$\underbrace{x^2 - 2x} + \underbrace{y^2 + 4y - 3 = 0}$$

$$(x-1)^2 - 1 + \underbrace{(y+2)^2 - 4 - 3 = 0}$$

$y^2 + 4y + 4 - 4 - 3$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8 \rightarrow \text{Equation du cercle de centre } (1; -2) \text{ et de rayon } \sqrt{8}.$$

- 2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1; 1)$ et $B(0; -1)$ et du cercle de centre $C(2; 0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB , ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.



$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9 \\ \text{Eq. de } (AB) \end{cases}$$

$$y = mx + p$$

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

$$\Rightarrow y = 2x + p \quad B \notin D \Rightarrow -1 = 2 \times 0 + p \Rightarrow p = -1$$

$$y = 2x - 1.$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (2x-1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = 9$$

$$5x^2 - 8x - 4 = 0.$$

$$\Delta = 64 + 4 \times 4 \times 5 = 144 = 12^2$$

$$x_1 = \frac{8-12}{10} = -0,4 \Rightarrow y_1 = 2 \times (-0,4) - 1 = -1,8$$

$$x_2 = \frac{8+12}{10} = 2 \Rightarrow y_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow I_1(-0,4; -1,8) \quad I_2(2; 3).$$

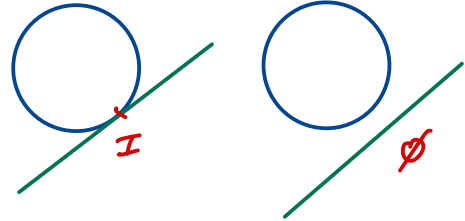
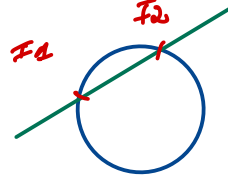
$$\underbrace{x^2 - 2x} + \underbrace{y^2 + 4y - 3 = 0}$$

$$(x-1)^2 - 1 + \underbrace{(y+2)^2 - 4 - 3 = 0}$$

$$y^2 + 4y + \cancel{4} - \cancel{4}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8 \rightarrow \text{Equation du cercle de centre } (1; -2) \text{ et de rayon } \sqrt{8}.$$

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1;1)$ et $B(0;-1)$ et du cercle de centre $C(2;0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB , ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.



$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9 \\ \text{Eq. de } (AB) \end{cases}$$

$$y = mx + p$$

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

$$y = 2x + p$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9 & (1) \\ y = 2x - 1 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow (1)$$

$$(x-2)^2 + (2x-1)^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = 9$$

$$5x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$\Delta = 144 = 12^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{8-12}{10} = -0,4 \Rightarrow y_1 = 2x_1 - 1 = -1,8$$

$$\Rightarrow I_1(-0,4; -1,8)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{8+12}{10} = 2 \Rightarrow y_2 = 2x_2 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow I_2(2; 3)$$

$$\theta = (\vec{OA}; \vec{OB})$$

et aire de OAB

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{OA}; \vec{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A = \frac{|-1|}{2} = 0,5 \text{ u.a.}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \pm 135^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = -135^\circ$$

3. Barycentres

3.1 Le barycentre de n points M_i de poids respectifs p_i est le point G vérifiant la relation

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

- (a) Établir la relation entre les coordonnées de G et celles des points M_i ?
 (b) Que devient cette dernière relation si G est l'isobarycentre des points ?

~~↪ Cours.~~

(c) Calculer les coordonnées du barycentre G et de l'isobarycentre I du triangle formé par les points $A(0;3)$, $B(1;1)$ et $C(4;0)$ affectés respectivement des poids 1, 3 et 2.

3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2;-1)$, en $B(1;2)$ et en $C(1;4)$.

(a) Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine? On appellera le point D .

(b) Où se situe le barycentre si l'on place en ce point D une masse de 2 kg?

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A , et calculer l'aire du triangle ABC .

$$(c) \quad x_G = \frac{p_A x_A + p_B x_B + p_C x_C}{p_A + p_B + p_C} = \frac{1 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 4}{1 + 3 + 2} = \frac{11}{6}$$

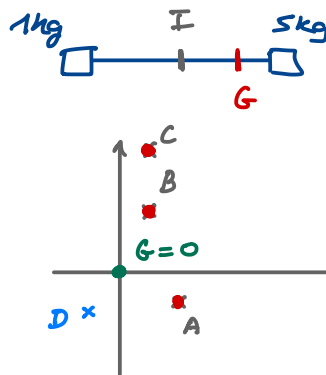
$$y_G = \frac{p_A y_A + p_B y_B + p_C y_C}{p_A + p_B + p_C} = \frac{1 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times 0}{1 + 3 + 2} = 1$$

$$G\left(\frac{11}{6}; 1\right)$$

$$\text{Isobarycentre } I: \quad x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0 + 1 + 4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 1 + 0}{3} = \frac{4}{3}$$

$$I\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$$



Wanted: $D(x; y)$ (4kg) pour que $G=0$.

$$(1) \quad x_G = 0 = \frac{1 \times x_A + 1 \times x_B + 1 \times x_C + 4 \times x_D}{7}$$

$$(2) \quad y_G = 0 = \frac{y_A + y_B + y_C + 4 \times y_D}{7}$$

$$(1) \quad 2 + 1 + 1 + 4x_D = 0 \Rightarrow x_D = -1$$

$$(2) \quad -1 + 2 + 4 + 4y_D = 0 \Rightarrow y_D = -\frac{5}{4} = -1,25$$

$$\Rightarrow D(-1; -1,25)$$

3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2;-1)$, en $B(1;2)$ et en $C(1;4)$.

(a) Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine? On appellera le point D .

(b) Où se situe le barycentre si l'on place en ce point D une masse de 2 kg?

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A , et calculer l'aire du triangle ABC .

(b) G' nouveau barycentre

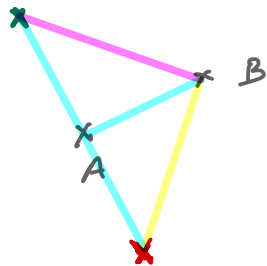
$$x_{G'} = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C + 2x_D}{5}$$

$$= \frac{2 + 1 + 1 + 2x(-1)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$y_{G'} = \frac{-1 + 2 + 4 + 2x(-1,25)}{5} = 0,5$$

$$G'(0,4; 0,5)$$

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A , et calculer l'aire du triangle ABC .



Etape: ① $\vec{AB}$

② $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

③ $\det(\vec{AB}; \vec{AC})$

④ $\vec{AC} \rightarrow x_C$ et y_C

① $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

② $\vec{AC}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

③ $\det(\vec{AB}; \vec{AC}_1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 > 0$

$C = C_1 \Rightarrow \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C + 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_C = -2 + 1 = -1$

$y_C = 1 - 2 = -1$

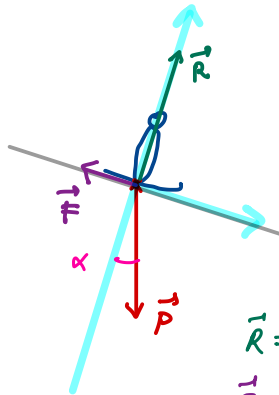
$\Rightarrow C(-1; -1)$

$A = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u.a.}$

4. Application en physique

Un skieur de masse totale $m = 90 \text{ kg}$, tout équipement compris, descend une piste inclinée d'un angle $\alpha = 10^\circ$ par rapport à l'horizontale. Sa vitesse étant constante, on choisit de modéliser l'ensemble des frottements qu'il subit par une force unique $\vec{F}$ ayant la même direction que le mouvement du skieur mais de sens opposé. On peut modéliser le skieur par un solide en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Après avoir tracé les vecteurs modélisant les différentes forces mises en jeu, déterminer leurs coordonnées et en déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{F}$.



$$\text{PFD: } \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\text{Wanted: } \|\vec{F}\| = F.$$

$$\vec{R} = (0; R)$$

$$\vec{F} = (-F; 0)$$

$$F > 0$$

$$\vec{P} = (P_x; P_y)$$

$$P_x = P \sin \alpha \quad P > 0$$

$$P_y = -P \cos \alpha$$

$$0 - F + P_x = 0 \Rightarrow F = P_x = P \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

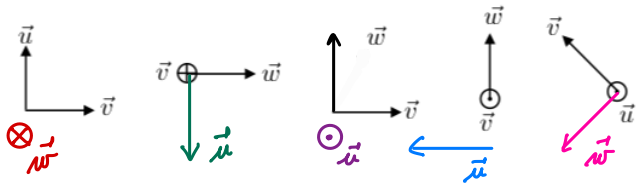
$$F = 90 \times 9,81 \times \sin(10^\circ) = \underline{153 \text{ N.}}$$

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

Dans toute cette feuille, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Produits scalaire, vectoriel et mixte

1.1 Soient trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Dessiner les vecteurs manquants dans les cinq cas représentés ci-dessous.



$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ direct.}$$

1.2 On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$:

- donner leurs coordonnées;
- calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ puis $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif?

$$\begin{aligned} \vec{b} \wedge \vec{c} &= (\vec{i} + \vec{k}) \wedge (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= \cancel{\vec{i} \wedge \vec{i}} + \vec{i} \wedge \vec{j} + \vec{i} \wedge \vec{k} + \vec{k} \wedge \vec{i} + \vec{k} \wedge \vec{j} + \vec{k} \wedge \vec{k} \\ &= \vec{0} + \vec{k} + (-\vec{j}) + \vec{j} + (-\vec{i}) + \vec{0} \\ &= -\vec{i} + \vec{k} \end{aligned}$$

→ À faire avec les coordonnées

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{c} + \vec{k}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ ne veut rien dire

1.3 On considère les vecteurs $\vec{u} = (3; 1; -2)$, $\vec{v} = (2; 0; 1)$ et $\vec{w} = (1; 1; 4)$:

- calculer leurs normes;
- calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$;
- calculer les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w})$;
- calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ et indiquer si le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct ou indirect.
- Le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u} + 2\vec{v}$ et est unitaire : calculer les coordonnées de $\vec{a}$.

$$(a) \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{14} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{5} \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$(b) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = -4$$

$$(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} 2 \times 3 - 3 \times 2 \\ 2 \times 1 - 3 \times 0 \\ 2 \times (-2) - 3 \times 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 0 + 1 \\ 1 + 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -33$$

$$(c) \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -35 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad [\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = m \in \mathbb{R}$$

$$= \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = -14 = m$$

$[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]$ est indirect (inverse)

De plus le volume engendré vaut $14u.v$.

$$(e) \quad \vec{a} = k(\vec{u} + 2\vec{v}) \text{ avec } k > 0$$

$$\|\vec{a}\| = 1 \quad (\vec{a} \text{ unitaire})$$

$$\|\vec{a}\| = |k| \cdot \|\vec{u} + 2\vec{v}\| = 1$$

$$\Rightarrow |k| = \frac{1}{\|\vec{u} + 2\vec{v}\|} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{u} + 2\vec{v}}{\|\vec{u} + 2\vec{v}\|}$$

sens

$$\vec{u} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{u} + 2\vec{v}\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{u} + 2\vec{v}}{\|\vec{u} + 2\vec{v}\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

même sens

Exo Sup

Soit $\vec{v} = (4; -3; 0)$ Trouver $\vec{u}$ unitaire et opposé à $\vec{v}$.

$$\vec{u} = -\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\frac{1}{5}(4; -3; 0) = \left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0\right)$$

2. Objets de l'espace et calculs de grandeurs

2.1 À partir des résultats de l'exercice précédent: 1.3 :

- déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- donner une mesure au signe près de l'angle $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.

$$(a) \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \pm \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right) = \arccos \left(\frac{4}{\sqrt{14} \sqrt{5}} \right)$$

$$= \pm 61,4^\circ$$

2.2 Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{OB} = -\vec{i} + 4\vec{k}$ et donner une mesure au signe près de l'angle $(\vec{AOB})$.

2.3 On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$:

- déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan ABC ;
- calculer l'aire du triangle ABC ;
- calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$S = \|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\| \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$S = \sqrt{474} \approx 21,8 \text{ uA}$$

$$\rightarrow \text{Mesure au signe près} \quad \theta = (\vec{OA}; \vec{OB})$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{35} \sqrt{17}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{35} \sqrt{17}} = 0,451 \Rightarrow \theta = \pm 63,2^\circ$$

2.3 On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$:

- déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan ABC ;
- calculer l'aire du triangle ABC ;
- calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

$$\|\vec{n}\| = 1$$

O est l'origine

(a) CM: $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{AB} \wedge \vec{AC}}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|} \rightarrow \text{pour avoir un vecteur unitaire}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ +3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$$

NB: $\vec{n} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une autre solution

$$(b) A = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2} = 3,5 \text{ uA.}$$

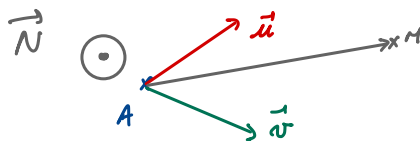
$$(c) V = |m| \quad m = [\vec{OA}; \vec{OB}; \vec{OC}]$$

$$\begin{aligned} m &= \vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 = m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = 6 \text{ uV}$$

2.4 Déterminer une équation cartésienne :

- du plan Π_1 passant par $A(1; 1; 1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (2; 0; 1)$ et $\vec{v} = (0; 1; 2)$;
- du plan Π_2 passant par $B(1; 0; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2; 1; 1)$.



$\Pi \in \Pi_1$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{AP} = k\vec{u} + l\vec{v}$$

$\Leftrightarrow$

$\vec{AP}; \vec{u}; \vec{v}$ coplanaires

Je cherche $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ / $m = [\vec{u}; \vec{v}; \vec{AN}] = 0$.

$$m = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{AN} = 0$$

$$= \vec{N} \cdot \vec{AN} = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{N} \quad -x - 4y + 2z + d = 0$$

$$\vec{AN} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \vec{N} \cdot \vec{AN} = 0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + 1 - 4y + 4 + 2z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 4y + 2z + 3 = 0$$

(b) $\vec{n} = (2; 1; 1) \Rightarrow \pi_2: 2x + y + z + d = 0$

$$B \in \pi_2 \Rightarrow 2 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$\Rightarrow 2x + y + z - 3 = 0$$

On a aussi $\vec{n} \cdot \vec{BN} = 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow 2x - 2 + y + z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 3 = 0.$$

2.5 Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ de l'exercice précédent.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 - 4 + 2 = -4 = m$$

$$V = |m| = 4 \text{ u.v.}$$

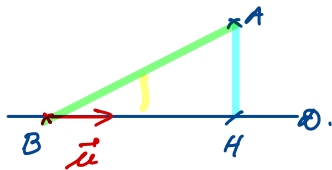
NB: $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{n})$ est indirect car $m < 0$

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{n}; \vec{u}; \vec{v}) \\ (\vec{u}; \vec{n}; \vec{v}) \\ (\vec{n}; \vec{v}; \vec{u}) \end{array} \right\} \text{ sont directs}$$

2.6 On considère :

- le point A de coordonnées (2; 0; 5);
- la droite D passant par B(0; -2; -4) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(2; 1; 0)$;
- le plan Π d'équation $x + y + 2z - 5 = 0$.

- Calculer les distances d_1 de A à D et d_2 de A à Π à l'aide des produits scalaires et vectoriels.
- La droite D est-elle parallèle au plan Π ?
- Déterminer les équations d'une droite parallèle à Π et passant par A. Cette droite est-elle unique?



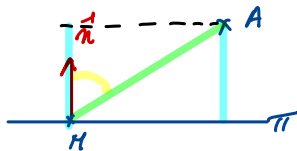
$$d_1 = d(A; D)$$

$$d_1 = \frac{\|\vec{BA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\vec{BA} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{\sqrt{409}}{\sqrt{5}} = 9,4 \text{ m}$$



$$d_2 = d(A; \Pi)$$

$$d_2 = \frac{|\vec{HA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$H\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right)$$

$$\vec{HA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{HA} \cdot \vec{n} = 7 \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{6}$$

$$d_2 = \frac{7}{\sqrt{6}} = 2,86 \text{ m} = d_2$$

$$\vec{BA} \wedge \vec{u} ? \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{BA} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ +18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) D \parallel \Pi \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \quad \text{or} \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow D$ n'est pas parallèle au plan

$$(c) \text{ Soit } \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x = -t + 2 = -t + 2 \\ y = t + 0 = t \\ z = 0t + 5 = 5 \end{cases}$$

$\leftarrow$ Il y a une infinité de droites.

3. Intersections d'ensembles

3.1 Donner une valeur approchée à trois chiffres significatifs du point d'intersection des trois plans définis par les équations suivantes :

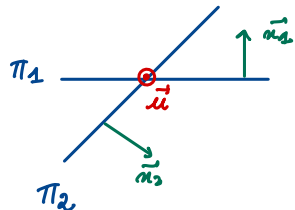
$$\Pi_1 : 2x + 3y - z - 5 = 0 ; \Pi_2 : 4x - 5y + 3z + 3 = 0 ; \Pi_3 : 2x - 6y + 7z + 6 = 0$$

3. Intersections d'ensembles

3.1 Donner une valeur approchée à trois chiffres significatifs du point d'intersection des trois plans définis par les équations suivantes :

$$\Pi_1 : 2x + 3y - z - 5 = 0 ; \Pi_2 : 4x - 5y + 3z + 3 = 0 ; \Pi_3 : 2x - 6y + 7z + 6 = 0$$

A priori $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = I$.



$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = I \text{ sans}$$

"ordre de données"

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 4x - 5y + 3z = -3 \\ 2x - 6y + 7z = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

NUMWORKS

rad EQUATIONS

$$\begin{cases} 2x + 3y + (-1z) = 5 \\ 4x + (-5y) + 3z = -3 \\ 2x + (-6y) + 7z = -6 \end{cases}$$

Résoudre le système

NUMWORKS

rad EQUATIONS Solution

x	$\frac{32}{43} \approx 0.7441860465$
y	$\frac{49}{43} \approx 1.139534884$
z	$-\frac{4}{43} \approx -0.09302325$

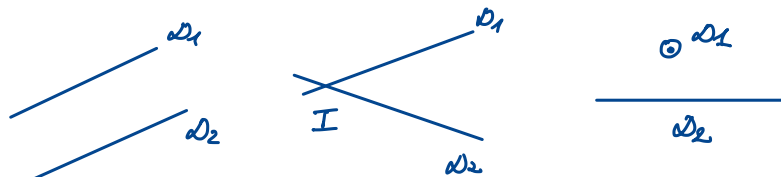
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0,744 \\ y = 1,14 \\ z = -0,0930 \end{cases}$$

3.2 Soient les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t - 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 5 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) montrer que ces droites sont dans le même plan en déterminant les coordonnées de leur intersection;

(b) donner une mesure de l'angle qu'elles forment.



$$\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$$

$$\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$$

$$\mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_2 \text{ forment un plan} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = I(x; y; z) \\ \text{ou} \\ \mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

$$I(x_I; y_I; z_I)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = 2t + 2 = 3t + 1 & (t_1) \\ y_I = -t - 2 = 2t - 5 & (t_2) \\ z_I = 3t - 1 = -t + 3 & (t_3) \end{cases} \text{ 3 eq. à 4 inconnues}$$

$$\text{si } t_1 = t_2 = t_3 = t \rightarrow I(x; y; z) \text{ synchronisation}$$

$$\text{ET } \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad t=1 \\ (2) \quad t=1 \\ (3) \quad t=1 \end{array} \right\} \quad \text{les 3 \u00e9q. imposent la m\u00eame valeur de } t$$

$$\Rightarrow t=1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_I=4 \\ y_I=-3 \\ z_I=2 \end{cases} \quad \Rightarrow I(4; -3; 2)$$

3.2 Soient les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x=2t+2 \\ y=-t-2 \\ z=3t-1 \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t-5 \\ z=-t+3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) montrer que ces droites sont dans le m\u00eame plan en d\u00e9terminant les coordonn\u00e9es de leur intersection;

(b) donner une mesure de l'angle qu'elles forment.

(c) \u00e9q. du plan Π .

$$(b) \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{14}$$

$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{1}{14}\right) = \underline{85,9^\circ}$$

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ +11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Pi: -5x + 11y + 7z + d = 0.$$

$$\rightarrow I(4; -3; 2) \text{ ou } A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ou } B \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-5 \times 2 + 11 \times (-2) + 7 \times (-1) + d = 0 \quad d = 39$$

$$\Pi: -5x + 11y + 7z + 39 = 0.$$

3.3 On consid\u00e8re :

— le plan Π d'\u00e9quation $3x - 2y + 4z + 5 = 0$

— la droite $\mathcal{D}$ d'\u00e9quations param\u00e9triques $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t + 4 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

D\u00e9terminer le point d'intersection ou bien, s'il n'existe pas, la distance entre Π et $\mathcal{D}$.

$$\Pi \cap \mathcal{D} = I(x; y; z) \quad \begin{cases} 3x - 2y + 4z + 5 = 0 & (1) \\ x = -2t - 1 & (2) \\ y = 3t + 4 & (3) \\ z = 3t - 1 & (4) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

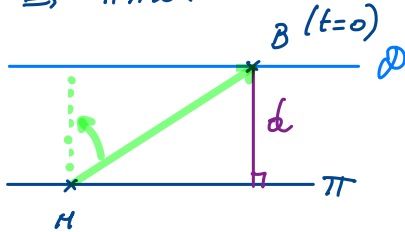
$$\Rightarrow 3(-2t-1) - 2(3t+4) + 4(3t-1) + 5 \stackrel{\text{eq.}}{=} 0$$

$$-6t - 3 - 6t - 8 + 12t - 4 + 5 \stackrel{\text{eq.}}{=} 0$$

$$\underline{-10 \stackrel{\text{eq.}}{=} 0}$$

$$\Rightarrow t \notin \phi.$$

$$\Rightarrow \pi // \mathcal{D}.$$



$$d = \frac{|\overrightarrow{HB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad H \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 4-1 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HB} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -10 \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow d = \frac{10}{\sqrt{29}} \simeq \boxed{1,86 \text{ uL} \simeq d}$$

3.4 Soit la droite $\mathcal{D}$ décrite par les équations paramétrées :

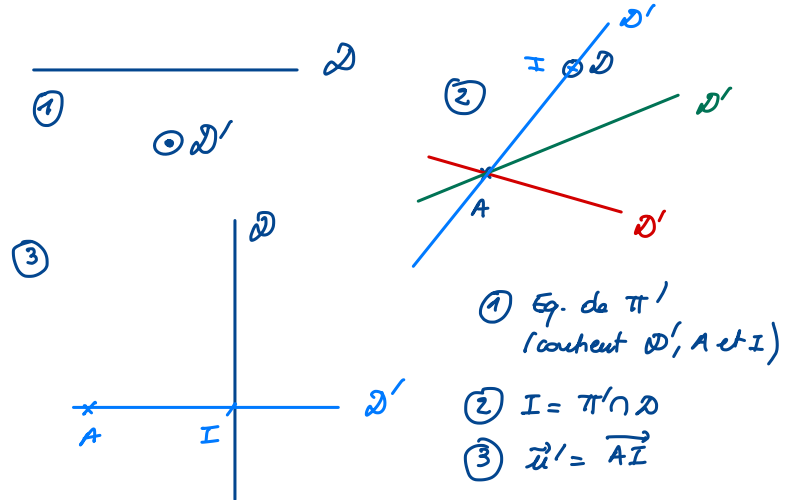
$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = t+1 \\ y = t \\ z = 2t-1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) déterminer une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine;
 (b) déterminer des équations paramétrées de la droite $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ passant par le point $A(1;2;3)$ et coupant la droite $\mathcal{D}$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

1a) $\Pi: x+y+2z=0.$

En effet: $\Pi \perp \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n}_{\Pi} = \vec{u}_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Pi: x+y+2z+d=0$

$$0 \in \Pi \Rightarrow 0+0+0+d=0 \Rightarrow d=0.$$



$$(1) \pi': x+y+z+d=0$$

$$1+2+6+d=0 \quad d=-9$$

$$\underline{x+y+z-9=0}$$

$$(2) I = 20\pi' \quad (t+1) + (t) + 2(2t-1) - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 6t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$I \begin{pmatrix} \frac{5}{3} + 1 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow I \begin{pmatrix} 8/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \vec{u} = \vec{AI} = \begin{pmatrix} 8/3 - 1 \\ 5/3 - 2 \\ 7/3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \vec{u}'$$

$$\Rightarrow (\vec{AM} = t\vec{u}' \text{ cf cours})$$

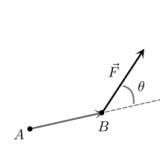
$$\Rightarrow D: \begin{cases} x = \frac{5}{3}t + 1 \\ y = -\frac{t}{3} + 2 \\ z = -\frac{2t}{3} + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Application en physique

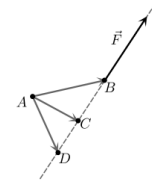
4.1 Le moment $\vec{M}$ de la force $\vec{F}$ appliquée en B par rapport à un point A donné est une grandeur physique vectorielle qui quantifie l'aptitude de cette force à faire tourner le système mécanique autour de ce point A . Celui-ci se calcule au travers de la relation

$$\vec{M} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

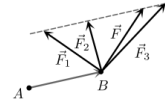
et le sens de $\vec{F}$ permet de déterminer le sens de rotation à l'aide de la règle du tournevis.



(a) Moment d'une force



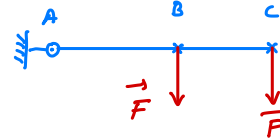
(b) Différents points d'application



(c) Différentes forces

À l'aide de la figure ci-dessus :

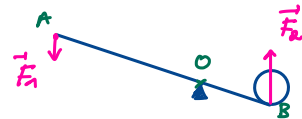
- montrer que le moment est le même pour les points d'application B , C et D (volet (b)) et conclure;
- montrer que le moment est le même quelle que soit la force reportée dans le volet (c) et conclure.



$$\vec{AB} \wedge \vec{F} = \vec{M}_1$$

$$\vec{AC} \wedge \vec{F} = \vec{M}_2$$

$$M_1 < M_2$$

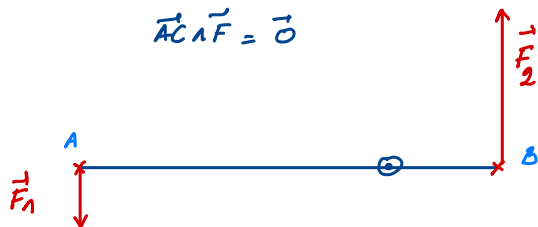


$$\vec{OA} \wedge \vec{F}_1 = \vec{OB} \wedge \vec{F}_2$$

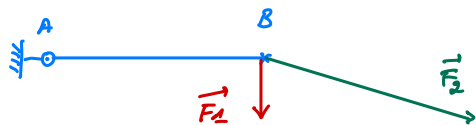
$$\vec{M}_1 = \vec{M}_2$$



$$\vec{AC} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$



$$OA \times F_1 = OB \times F_2$$



$$\vec{M}_A = \vec{AB} \wedge \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_2 = \vec{AB} \wedge \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_2 + k \vec{AB}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{AB} \wedge (\vec{F}_2 + k \vec{AB}) = \vec{AB} \wedge \vec{F}_2 + k \cancel{\vec{AB} \wedge \vec{AB}} = \vec{M}_2$$

→ à voir en mécanique.

1. Coordonnées du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants, repérés soit en coordonnées cartésiennes ($x; y$), soit en coordonnées polaires ($r; \theta$) :

$$A(r = 3,5; \theta = 40^\circ); B(x = 2; y = 2,5); C(r = 4; \theta = 35^\circ); D(r = 5; \theta = \pi/12); E(x = -1; y = 3);$$

$$F(r = 3; \theta = 125^\circ); G(r = 1,5; \theta = -20^\circ); H(x = 2; y = -1); I(r = 3,5; \theta = -2\pi/3)$$

	Coordonnées cartésiennes		Coordonnées polaires	
	x	y	r	θ
A	2,68	2,25	3,5	40°
B	2	2,5	3,20	$51,3^\circ$
C	3,28	2,29	4	35°
D	4,83	1,29	5	$\pi/12 = 15^\circ$
E	-1	3	3,16	108°
F	-1,72	2,46	3	125°
G	1,41	-0,513	1,5	-20°
H	2	-1	2,24	$-26,6^\circ$
I	-1,75	-3,03	3,5	$-2\pi/3 = -120^\circ$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm \frac{1}{2} \text{ tour si } x < 0$$

- quel point est le plus éloigné de l'origine, et quel point en est le plus proche;
- quels points sont plus proches de l'origine que le point B;
- le point le plus haut, le plus bas, le plus à droite et le plus à gauche du plan;
- le point le plus proche de l'axe des abscisses, et le point le plus proche de l'axe des ordonnées.

$$\textcircled{1} r_{\max} : D$$

$$\textcircled{2} r_{\min} : G$$

$$\textcircled{3} r < 3,20 : E, F, G, H.$$

$$\textcircled{4} y_{\max} : E$$

$$\textcircled{5} y_{\min} : I$$

$$\textcircled{6} x_{\max} : D$$

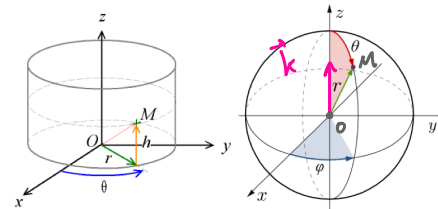
$$\textcircled{7} x_{\min} : I$$

$$\textcircled{8} |y|_{\min} : G$$

$$\textcircled{9} |x|_{\min} : E$$

2. Coordonnées de l'espace

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé ($O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$). La figure ci-dessous rappelle les variables utilisées pour repérer un point en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.



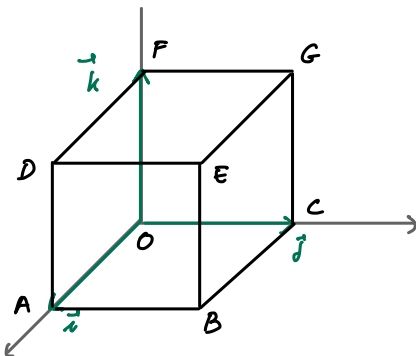
À gauche : Coordonnées cylindriques

À droite : Coordonnées sphériques

Fig. 1 : Systèmes de coordonnées dans l'espace

- 2.1 Calculer les coordonnées **sphériques**, puis **cylindriques**, des sommets du cube de côté 1 et dont les vecteurs du repère forment trois arêtes.

2.1 Calculer les coordonnées **sphériques**, **cylindriques**, des sommets du cube de côté 1 et dont les vecteurs du repère forment trois arêtes.



Point	Cartésiennes (x; y; z)	Cylindriques (r; θ; z)	Sphériques (r; θ; φ)
A	(1; 0; 0)	(1; 0; 0)	(1; 90°; 0)
B	(1; 1; 0)	(√2; 45°; 0)	(√2; 90°; 45°)
C	(0; 1; 0)	(1; 90°; 0)	(1; 90°; 90°)
D	(0; 0; 0)	(0; 0; 0)	(0; 0; 0)
E	(1; 0; 1)	(1; 0; 1)	(√2; 45°; 0)
F	(1; 1; 1)	(√2; 45°; 1)	(√3; 54,7°; 45°)
G	(0; 0; 1)	(0; 0; 1)	(1; 0; 0)
	(0; 1; 1)	(1; 90°; 1)	(√2; 45°; 90°)

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,7^\circ$$

2.2 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, donner les coordonnées **sphériques** et **cylindriques** des points A, B, C, D dont les coordonnées **cartésiennes** sont : A(1; 0; 2), B(2; 2; 2), C(-1; 5; 0) et D(0; 3; -1).

CYLINDRIQUES

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm \frac{1}{2} \text{ tour si } x < 0$$

$$z = z$$

SPHÉRIQUES

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm \frac{1}{2} \text{ tour si } x < 0.$$

$$A(1; 0; 2)$$

$$r = \sqrt{1+0} = 1$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

$$z = 2$$

$$(1; 0; 2)$$

$$r = \sqrt{5}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{r}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= 26,6^\circ$$

$$\varphi = 0$$

$$(\sqrt{5}; 26,6^\circ; 0^\circ)$$

$$B(2; 2; 2) \quad r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = 45^\circ$$

$$z = 2$$

$$(2\sqrt{2}; 45^\circ; 2)$$

$$r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = 54,7^\circ$$

$$\varphi = 45^\circ$$

$$(2\sqrt{3}; 54,7^\circ; 45^\circ)$$

$$C(-1; 5; 0) \quad r = \sqrt{26}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{-1}\right) + 180^\circ = 101^\circ$$

$$z = 0$$

$$(\sqrt{26}; 101^\circ; 0)$$

$$r = \sqrt{26}$$

$$\theta = 90^\circ$$

$$\varphi = 101^\circ$$

$$(\sqrt{26}; 90^\circ; 101^\circ)$$

$$D(0; 3; -1) \quad r = 3$$

$$\theta = \pi/2 = 90^\circ$$

$$z = -1$$

↖ arctan de $+\infty \rightarrow$

$$(3; 90^\circ; -1)$$

$$r = \sqrt{10}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = 108^\circ$$

$$\varphi = 90^\circ$$

$$(\sqrt{10}; 108^\circ; 90^\circ)$$

2.3 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, calculer les coordonnées **cartésiennes** :

(a) du point A dont les coordonnées **sphériques** sont : $r = 3$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$;

(b) du point B dont les coordonnées **cylindriques** sont : $r = 2$, $\theta = 5\pi/4$, $z = 1$.

$$(a) \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$x = 3 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}$$

$$y = 3 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$z = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$A\left(\frac{9}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{2}\right)$$

$$x = 2 \cos \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

$$y = 2 \sin \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

$$z = 1$$

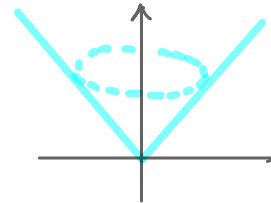
$$B(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 1)$$

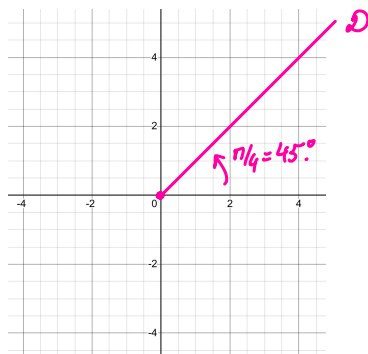
2.4 En coordonnées **cylindriques**, l'ensemble des points tels que $r = \text{constante}$ est :

(A) un cercle ; (B) un cylindre ; (C) une sphère

2.5 En coordonnées **sphériques**, l'ensemble des points tels que $\theta = \text{constante}$ est :

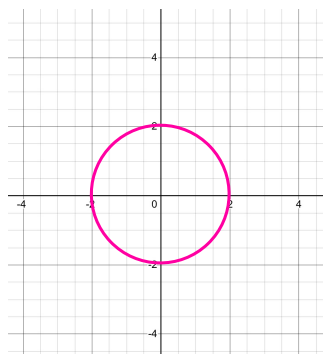
(A) un cercle passant par les pôles ; (B) un disque horizontal ; (C) un cône d'axe (Oz)





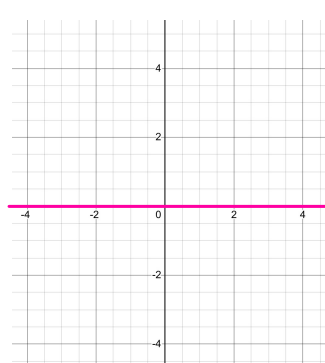
$$(e) \arg(z) = \pi/4$$

$$\theta = \pi/4$$



$$(f) z \cdot \bar{z} = 4$$

$$r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2.$$



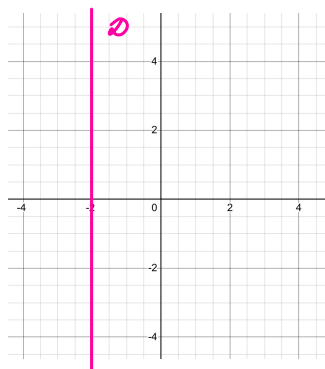
$$(i) z = \bar{z}$$

$$z \in \mathbb{R}.$$

$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy$$

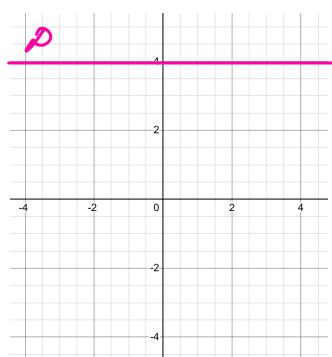
$$\begin{cases} x = x \leftarrow \text{toujours vraie} \\ y = -y \Leftrightarrow y = 0 \end{cases}$$



$$(g) z + \bar{z} = -4$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$x = -2$$



$$(h) z - \bar{z} = 8i$$

$$= 2i \operatorname{Im}(z)$$

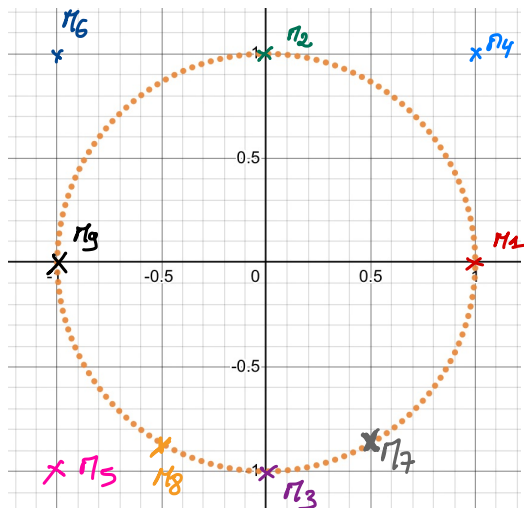
$$2y = 8 \Leftrightarrow y = 4$$

$$(a + ib) - (a - ib) = 2ib$$

1.3 Déterminer graphiquement le module et l'argument des nombres suivants et donner leurs expressions exponentielles :

$$z_1 = 1; z_2 = i; z_3 = -i; z_4 = 1+i; z_5 = -1-i; z_6 = -1+i;$$

$$z_7 = \frac{+1-i\sqrt{3}}{2}; z_8 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; z_9 = -1$$



$$z = x + iy \Leftrightarrow r(x; y)$$

$$z_1 = 1 \Leftrightarrow r_1(1; 0) \quad r=1 \quad \theta = \langle \vec{x}; \vec{\theta}_{r=1} \rangle = 0 \quad z_1 = 1e^{i0} = 1$$

$$z_2 = i \Leftrightarrow r_2(0; 1) \quad r=1 \quad \theta = \pi/2 \quad z_2 = e^{i\pi/2}$$

$$z_3 = -i \quad r_3(0; -1) \quad r=1 \quad \theta = -\pi/2 \quad z_3 = 1e^{-i\pi/2} = e^{-i\pi/2}$$

$$z_4 = 1+i \quad r_4(1; 1) \quad r=\sqrt{2} \quad \theta = \pi/4 \quad z_4 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$z_5 = -1-i \quad r_5(-1; -1) \quad r=\sqrt{2} \quad \theta = -\frac{3\pi}{4} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} z_5 = -1-i \\ r_5(-1; -1) \end{matrix}} \right\} z_5 = \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_6 = -1+i \quad r_6(-1; 1) \quad r=\sqrt{2} \quad \theta = \frac{3\pi}{4} \quad z_6 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_7 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad r_7\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = -\pi/3 \quad z_7 = 1e^{-i\pi/3}$$

$$z_8 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad r_8\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad r=1$$

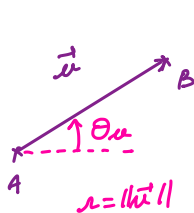
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \quad \theta = -\frac{2\pi}{3} \quad z_8 = 1e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_9 = -1 \quad r_9(-1; 0) \quad r=1 \quad \theta = \pi \quad z_9 = e^{i\pi}$$

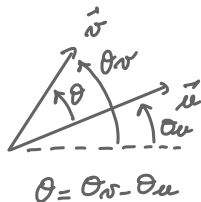
1.4 Soient A , B et C les points d'affixes $z_A = 2 + 2i$, $z_B = -1 + 3i$, et $z_C = 4 + 6i$, et soient les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:

(a) calculer les affixes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$;

(b) à partir de ces affixes, calculer la valeur de l'angle $\theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.



$$z_u = z_B - z_A$$



$$z_u = (-1 + 3i) - (2 + 2i) = -3 + i$$

$$z_v = (4 + 6i) - (2 + 2i) = 2 + 4i$$

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_v - \theta_u = \arctan\left(\frac{4}{2}\right) - \left[\arctan\left(\frac{1}{-3}\right) + 180^\circ\right] \\ &= 63,4^\circ - 162^\circ = -98,2^\circ = \theta \end{aligned}$$

1.5 Soient A , B et C d'affixes respectives $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 6i$.

(a) Donner l'affixe de $\overrightarrow{AC}$ sous forme exponentielle et déterminer la distance AC .

(b) Déterminer l'affixe z du point M tel que $3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$.

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 2 + 4i \quad r = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{4}{2}\right) = 63,4^\circ$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = 2\sqrt{5} e^{i63,4^\circ}$$

$$AC = r = 2\sqrt{5} \approx 4,47 \text{ u.l.} = AC$$

$$(b) \quad 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$$

$$3z_B - \cancel{z_A} - \cancel{z_A} + \cancel{z_A} = z_C - \cancel{z_A}$$

$$-2z = z_C - 3z_B \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} [3z_B - z_C]$$

$$z = \frac{1}{2} [3(1-2i) - (-1+6i)] = \frac{1}{2} [3+1-6i-6i]$$

$$z = 2 - 6i$$

1.6 Soit $\vec{u}$ d'affixe z et $\vec{v}$ d'affixe iz :

(a) que dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

(b) Plus généralement, que dire de $\vec{u}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $e^{i\theta}z$?

↑ Traité en cours.

2 Techniques de calcul

2.1 Calculer les nombres complexes suivants, et exprimer les résultats obtenus sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2; \quad z_2 = \frac{1+3i}{1+2i}; \quad z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i)$$

$$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 = 1-4i-4 - (4+4i-1) = -3-4i - (3+4i) = -6-8i \quad z_1 = 10 e^{-i127^\circ}$$

$$z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} = \frac{(1+3i)(1-2i)}{5} = \frac{1-2i+3i+6}{5} = \frac{7+i}{5} = \frac{7}{5} + i\frac{1}{5}$$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{i8,13^\circ}$$

$$z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i) = 3i-4 - (\cancel{3i}-9i-\cancel{3}+3i) = -4+13i$$

$$z_3 = \sqrt{145} e^{i102^\circ}$$

2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(1) $z^2 = -9$; (2) $z^2 + 3z + 4 = 0$; (3) $z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$

(4) $z + 2i = iz - 1$; (5) $2z + i = \bar{z} + 1$;

(6) $z^4 = 1$; (7) $z^3 = -1$; (8) $z^4 = -16$; (9) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$

(1) $z^2 = -9$ $z = \pm 3i$ ($z_1 = 3i$ $z_2 = -3i$)

(2) $z^2 + 3z + 4 = 0$

$$\Delta = 9 - 16 = -7 = (i\sqrt{7})^2 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2} \\ z_2 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

(3) $z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$

$$\Delta = 12 - 4 \times 4 \times 1 = -4 = (2i)^2$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{2} = -\sqrt{3} - i$$

$$z_2 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{2} = -\sqrt{3} + i$$

$z = -\sqrt{3} \pm i$
conjuguées
des solutions

(4) $z + 2i = iz - 1 \Leftrightarrow z - iz = -1 - 2i$

$$z(1-i) = -1-2i \Leftrightarrow z = \frac{-1-2i}{1-i} = \frac{(-1-2i)(1+i)}{2}$$

$$= \frac{-1-i-2i+2}{2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{3}{2} = z$$

(5) $2z + i = \bar{z} + 1$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ ET \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Je pose $z = a + ib$ $\bar{z} = a - ib$

$$\Rightarrow 2(a+ib) + i = a - ib + 1$$

$$2a + 2ib + i = a + 1 - ib$$

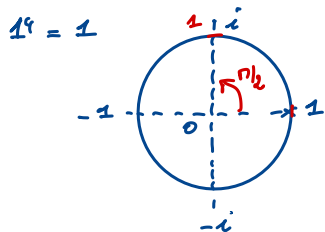
$$2a + i(2b+1) = a + 1 - ib$$

$$\begin{cases} 2a = a + 1 \\ 2b + 1 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 1 - i\frac{1}{3}$$

Exo 6 à 7

(6) $z^4 = 1$; (7) $z^3 = -1$; (8) $z^4 = -16$; (9) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$



$$z = re^{i\theta}$$

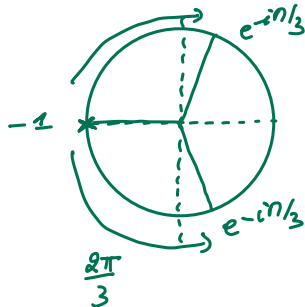
$$z^4 = (re^{i\theta})^4 = r^4 e^{i4\theta}$$

$$\Rightarrow r^4 e^{i4\theta} = 1e^{i0}$$

$$\begin{cases} r^4 = 1 & r \geq 0 \Rightarrow r = 1 \\ 4\theta = 0 [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 [\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 1e^{i\pi/2} = i \\ z_3 = 1e^{i\pi} = -1 \\ z_4 = 1e^{i3\pi/2} = 1e^{-i\pi/2} = -i \end{cases}$$

(7) $z^3 = -1$ $(-1)^3 = -1$



$$\begin{aligned} z_1 &= -1 \\ z_2 &= e^{i\pi/3} \\ z_3 &= e^{-i\pi/3} \end{aligned}$$

$$(1e^{i\theta})^3 = 1e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} r^3 = 1 & r \geq 0 \Rightarrow r = 1 \\ 3\theta = \pi [2\pi] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$

(8) $z^4 = -16$

$$z = re^{i\theta}$$

$$-16 = 16e^{i\pi}$$

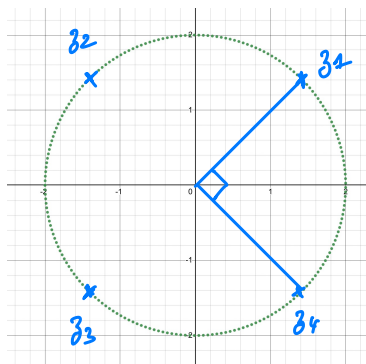
$$r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i\pi} \Rightarrow \begin{cases} r^4 = 16 & r \geq 0 \Rightarrow r = 2 \\ 4\theta = \pi [2\pi] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} [\frac{5\pi}{4}] \end{cases}$$

$$z_1 = 2e^{i\pi/4}$$

$$z_2 = 2e^{i3\pi/4}$$

$$z_3 = 2e^{i5\pi/4} = 2e^{-i3\pi/4}$$

$$z_4 = 2e^{i7\pi/4} = 2e^{-i\pi/4}$$



(6) $z^4 = 1$; (7) $z^3 = -1$; (8) $z^4 = -16$; (9) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$

19) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$ Je pose $z = re^{i\theta}$. Et $2\sqrt{3} - 2i$?

$$|2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{4 \times 3 + 4} = 4$$

$$\arg(2\sqrt{3} - 2i) = \arctan\left(\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

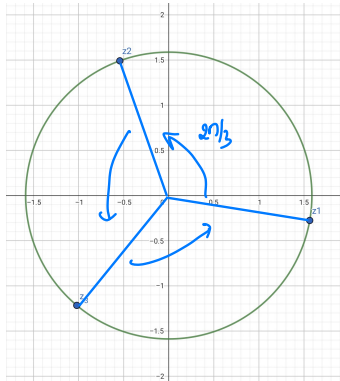
$$\Rightarrow r^3 e^{i3\theta} = 4 e^{-i\pi/6} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 4 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{4} \simeq 1.59 \\ \theta = -\frac{\pi}{18} \left[\frac{2\pi}{3} \right] \end{cases} \quad \frac{2\pi}{3} = \frac{12\pi}{18}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4} e^{-i\pi/18}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4} e^{i11\pi/18}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{4} e^{i23\pi/18} = \sqrt[3]{4} e^{-i13\pi/18}$$



$z_2 \neq \overline{z_3}$ car $2\sqrt{3} - 2i \notin \mathbb{R}$.

2.3 Calculer les nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$; (b) $z_2 = (5+3i)^7$; (c) $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$; (d) $z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}$; (e) $z_5 = \frac{4+6i}{1-5i}$

$$\begin{aligned} (1+i)^{32} &= (\sqrt{2} e^{i\pi/4})^{32} \\ &= \sqrt{2}^{32} e^{i32\pi/4} \\ &= 65536 \end{aligned}$$

(a) $z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = z^6$

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\arg(z) = -\pi/3$

$$\Rightarrow z = e^{-i\pi/3}$$

$$\Rightarrow z_1 = \left(e^{-i\pi/3}\right)^6 = e^{-i6\pi/3} = 1$$

(b) $z_2 = z^7$ avec $z = 5+3i$

$$|z| = \sqrt{34}$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 31,0^\circ$$

$$z^7 = \left(\sqrt{34} e^{i31^\circ}\right)^7 \simeq 22900 e^{i217^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 1c) \quad z_3 &= \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{4} \\
 &= \frac{(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)}{4}
 \end{aligned}$$

Rq: $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$
 $\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) = 2e^{-i\pi/6}$

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2} e^{i\pi/4}}{2 e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i \frac{\sqrt{3}+1}{4}
 \end{aligned}$$

→ On utilisera ceci dans l'exo 3.1.

1d) $z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3} \rightarrow$ Utiliser la forme exponentielle.

$$z_4 = \frac{(\sqrt{2} e^{-i\pi/4})^2}{(2 e^{i\pi/6})^3} = \frac{2 e^{-i\pi/2}}{8 e^{i\pi/2}} = \frac{1}{4} e^{-i\pi} = -\frac{1}{4} = z_4$$

$$\begin{aligned}
 1e) \quad z_5 &= \frac{4+6i}{1-5i} = \frac{(4+6i)(1+5i)}{26} \\
 &= \frac{4+20i+6i-30}{26} = \frac{-26+26i}{26} = -1+i = z_5
 \end{aligned}$$

3 Trigonométrie

3.1 À l'aide des formes exponentielles des nombres complexes $z = \sqrt{3}+i$ et $z' = 1+i$, déterminer les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

$$z = \sqrt{3}+i = 2 e^{i\pi/6}$$

$$z' = 1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

Je remarque que :

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{et } \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\arg(z') - \arg(z) = \frac{\pi}{12} = \arg\left(\frac{z'}{z}\right)$$

on a calculé ses formes exponentielles et algébriques.

$$\begin{aligned}
 \frac{z'}{z} &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
 &= \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad \text{with } \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\
 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}+1}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}+1}{4} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3.2 À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

↳ cf cours "Formule de Moivre"
(Section 4.2.3)

Outils mathématiques 1 — TD 5 : Calcul matriciel

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD)

1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $5A$; $8D$; $(1/2)B$; $3A - 2B$; $2A - 4B$; BC , BD , DB .

$$1. \quad 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad 8D = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 16 & -8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{impossible}$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{2 \times 3} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{2 \times 1}$

$$2A - 4B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$MN = \begin{pmatrix} \overset{c}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{2}{N} \end{pmatrix}$$

possible si $c=2$

$$B.C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2×3 2×1

Les dimensions sont incompatibles
⇒ produit impossible

$$B.D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2×3 3×2 2×2

$$D.B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3×2 2×3 3×3

$DB \neq BD$
↑ ↑
dimensions différentes.

produit matriciel
non-commutatif.

2. Effectuer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1/2 & 1/5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -7 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1/2 & 1/5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 179 \\ 13 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^{-1} , la matrice inverse de A .

(b) Utiliser le résultat précédent pour résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -8 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{cof}(A)$$

Exemple: $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} \text{ ou } \text{inv}(M)$

$$\det(M) = 3 \neq 0$$

$$\text{cof}(M) = \begin{pmatrix} +9 & -6 \\ -4 & +3 \end{pmatrix}$$

1. D'abord
2. j'oublie la ligne et la colonne correspondant à mon calcul.
3. Je calcule le déterminant de ce qui reste.

$${}^t \text{cof}(M) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Transposition: je lis en ligne et j'écris en colonne

$$M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice :

$$\det(A) = 5 \neq 0 \text{ j'inverse}$$

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} +3 & +2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$${}^t \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Utiliser le résultat précédent pour résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x+y=2 \\ -2x+3y=-1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x+y=-8 \\ -2x+3y=6 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x+y=0 \\ -2x+3y=3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ -2x+3y \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow AX = B_1 \quad (S_1)$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow AX = B_2 \quad (S_2)$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow AX = B_3 \quad (S_3)$$

$$AX = B$$

$$A^{-1} \cdot A = I = Id$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\text{car } Id = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons X dans les 3 systèmes

$$(S_1) \quad X = A^{-1} \cdot B_1$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{7}{5} \quad y = \frac{3}{5}$$

$$(S_2) \quad X = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -6 \\ y = -2 \end{array} \right.$$

$$(S_3) \quad X = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -3/5 \\ y = 3/5 \end{array} \right.$$

4. (a) Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Ces matrices sont-elles inversibles ?

(c) Calculer B^{-1} la matrice inverse de B .

(a) $\det(A) = 18$

$$\det(B) = 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0$$

$$= -8$$

(b) oui

(c) $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^t \omega(B)$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\omega(B) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\omega(B) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 2 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

$${}^t \omega(B) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Inverser la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(C) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 42 - 16 = 26 \neq 0 \Rightarrow C^{-1} \text{ existe}$$

$$\omega(C) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$C_0(C) = \begin{pmatrix} -48 & 42 & 32 \\ 8 & -7 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad {}^t C_0 = \begin{pmatrix} -48 & 8 & 6 \\ 42 & -7 & -2 \\ 32 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -48 & 8 & 6 \\ 42 & -7 & -2 \\ 32 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ex 7 et 8 puis 6, 10 etc.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 et A^3 .

(b) Calculer $P(A)$ où P est le polynôme $P(X) = 5X^2 + 6X + 3$.

8. On donne $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $X^t X$ et ${}^t X X$.

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^3$$

$$16) \quad P(A) = 5A^2 + 6A + 3 \cdot \text{Id}$$

$$= 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 16 & 21 \\ 0 & 14 & 16 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X {}^t X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$$

$${}^t X \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Interêt: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \Delta = 5$

2) $\Delta = 5 = {}^t U \cdot V$

6. À quelle(s) condition(s) la matrice $D(m) = \begin{pmatrix} m & 2 & 5 \\ 0 & 6 & m \\ m & 3 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

Wanted: m tel que $\det(D) \neq 0$

$$\det(D) = m \begin{vmatrix} 6 & m \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & m \end{vmatrix} = m(18 - 3m) + m(2m - 30)$$

$$= -m^2 - 12m = -m(m + 12) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \text{ET} \\ m \neq -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 4 & (1) \\ 6x + 2y = 8 & (2) \\ 3x + y = 4 & \end{cases}$$

$y = -3x + 4$

$\Rightarrow$ une infinité de solutions

$$\begin{cases} 3x + y = 3 & (1) \\ 6x + 2y = 8 & (2) \\ 3x + y = 4 & (2') \end{cases}$$

$(1) - (2') \Rightarrow 0 = -1$ jamais vrai $\rightarrow$ Aucune solution.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = 0$$

M^{-1} n'existe pas

$$M_x = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_x) = 0$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_y) = 0$$

Infinité de solution $\Leftrightarrow \begin{cases} \det(M) = 0 \\ \text{ET} \\ \det(M_x) = 0 \\ \det(M_y) = 0 \end{cases}$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = 0$$

M^{-1} n'existe pas

$$\det(M_2) = -2 \neq 0$$

$$\det(M_3) = 6 \neq 0$$

$$\det(M) = 0 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \text{ou } \det(M_2) \neq 0 \\ \text{ou } \det(M_3) \neq 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ aucune solution.

Il suffit qu'un seul soit non-nul

9. Soit le système de paramètres m et n :

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ 4y + mz = 2 \\ my + z = n \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) ce système n'admet-il aucune solution ?

Wanted: m et n tels que $\det(M) = 0$ (1)

et que $\left\{ \begin{array}{l} \det(M_2) \neq 0 \text{ (2.1)} \\ \text{ou} \\ \det(M_3) \neq 0 \text{ (2.2)} \\ \text{ou} \\ \det(M_4) \neq 0 \text{ (2.3)} \end{array} \right.$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 4-m & 1 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 4-m & 1 \\ n & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & m \\ 0 & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & m & n \end{pmatrix}$$

(1) $\det(M) = 0 \Leftrightarrow 1 \begin{vmatrix} 4-m & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{eq.}}{=} 0 \Leftrightarrow 4-m^2 = 0$

$\Leftrightarrow m = -2 \text{ ou } m = 2$

(2.1) $\det(M_2) = 1 \begin{vmatrix} 4-m & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} 2 & m \\ n & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ n & m \end{vmatrix}$
~~car (1).~~

$$\begin{aligned}\det(M_2) &= -m(2-nm) + 1(2m-4n) \\ &= -\cancel{2m} + nm^2 + \cancel{2m} - 4n \\ &= +n(\cancel{m^2-4})\end{aligned}$$

$$\det(M_2) = 0 \quad \textcircled{2.1} \text{ irréalisable}$$

$$\textcircled{2.2} \det(M_2) = 1 \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ n & 1 \end{vmatrix} = 2 - nm$$

$$2 - nm \neq 0 \Leftrightarrow n \neq \frac{2}{m}$$

$$\textcircled{2.3} \det(M_3) = 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ m & n \end{vmatrix} = 4n - 2m$$

$$4n - 2m \neq 0 \Leftrightarrow n \neq \frac{m}{2}$$

→ Le système n'admet aucune solution si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} m=2 \text{ et } (n \neq 1 \text{ ou } n \neq 1) \\ \text{ou} \\ m=-2 \text{ et } (n \neq -1 \text{ ou } n \neq -1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m=2 \text{ et } n \neq 1 \quad \bullet \\ \text{ou} \\ m=-2 \text{ et } n \neq -1 \quad \bullet \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 4y + 2z = 2 \\ 2y + z = n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ 4y - 2z = 2 \\ -2y + z = n \end{array} \right.$$

10. On considère dans ce qui suit des transformations géométriques du plan. Donner :

- (a) la matrice R associée à une rotation de centre O et de rayon r , d'angle θ ;
- (b) la matrice H associée à une homothétie de centre O et de rapport k ;
- (c) la matrice S associée à une similitude de centre O , de rapport k et d'angle θ .
- (d) les matrices Σ_x et Σ_y associées respectivement aux symétries d'axe (Ox) et (Oy) .
- (e) la matrice P d'une projection orthogonale sur l'axe (Ox) . Calculer alors P^2 , P^n et conclure.

$$(a) \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

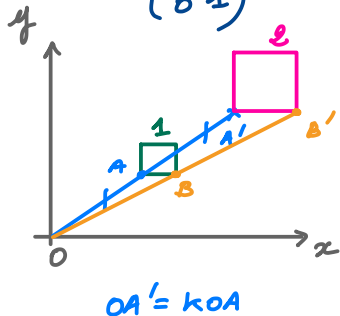
$$\det(R) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

$\Rightarrow R^{-1}$ existe

$\det(R) = 1 \Leftrightarrow$ les surfaces transformées sont multipliées par 1.

$$(b) \quad H = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad k > 0$$

$$= k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k \text{Id}$$



$$\det(H) = k^2 \neq 0$$

$\hookrightarrow H^{-1}$ existe

les surfaces transformées sont multipliées par k^2 .

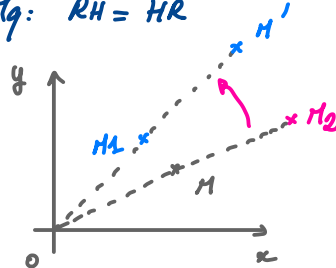
$$(c) \quad S(O; k; \theta) : M \xrightarrow{R} M_1 \xrightarrow{H} M'$$

$M' = HR.M$

$$M \xrightarrow{H} M_2 \xrightarrow{R} M'$$

$M' = R.H.M.$

$$Mq: \quad RH = HR$$



$$RH = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix} = kR$$

$$HR = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix} = kR.$$

$RH = HR = k.R \Rightarrow$ les transformations sont permutable

$$(d) \quad \Sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \\ y' = -y \end{pmatrix}$$

$$\det(\Sigma_x) = -1 = \det(\Sigma_y)$$

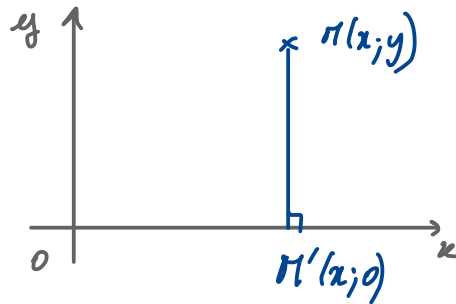
mêmes surfaces
mais orientations inverses (effet miroir)

$$\Sigma_x^{-1} = \Sigma_x$$

$$\omega(\Sigma_x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^t\omega(\Sigma_x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\det(\Sigma_x)} {}^t\omega(\Sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Sigma_x$$

(e)



$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(P) = 0$$

écrase les surfaces

P^{-1} n'existe pas.

la projection n'est pas réversible.

$$P \times P = P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = P^2 = P^3 = P^n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Peut être appelé un projecteur

11. En utilisant les matrices :

- (a) déterminer A' , l'image du point $A(1;3)$ par la rotation de centre O et d'angle 30° suivie de la symétrie d'axe (Ox) ;
- (b) déterminer A'' , l'image du point $A(1;3)$ par la symétrie d'axe (Ox) suivie de la rotation de centre O et d'angle 30° ;
- (c) déterminer B' , l'image du point $B(2;1)$ par la similitude de centre O , de rapport 2 et d'angle 60° .

1. Matrice de la transformation
2. Point image

$$\begin{aligned} (a) \quad T_a &= \Sigma_x \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$T_a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-3}{2} \\ \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,634 \\ -3,10 \end{pmatrix} = A'$$

$$\begin{aligned} (b) \quad T_b &= R \cdot \Sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = T_b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A'' &= T_b A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+3}{2} \\ \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ A'' &\approx \begin{pmatrix} 2,37 \\ -2,10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

R et Σ_x ne sont pas permutables

$$(c) \quad T_c = 2R(0; 60^\circ) = 2 \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_c &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B' = T_c \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,268 \\ 4,46 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12. On considère la transformation associée à la matrice $M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

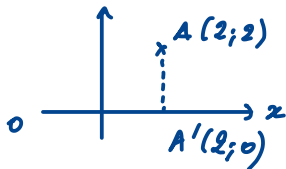
- Montrer que M est associée à une projection.
- Déterminer la droite sur laquelle la projection est faite.
- En se rappelant que la droite d'équation $y = mx + p$ admet comme vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale.
- La matrice M est-elle inversible? Cela vous paraît-il cohérent avec la transformation géométrique considérée?

(a) M est un projecteur $\Leftrightarrow M^2 = M$.

$$\begin{aligned} M.M &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

$M^2 = M \Leftrightarrow M$ est bien associé à une projection.

(b)

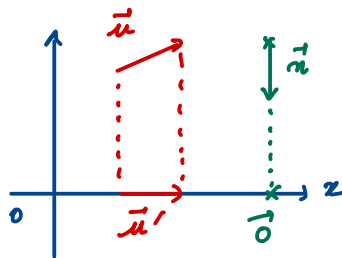


Soit $A(x;y)$ et soit $\mathcal{D}$ la droite de projection.

$$A = M.A \Leftrightarrow A \in \mathcal{D}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}(x+2y) = x \\ \frac{1}{5}(2x+4y) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 5x \\ 2x+4y = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+2y = 0 \\ 2x-y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x : \mathcal{D}.$$



$\vec{n}$ est le vecteur de projection $\Leftrightarrow M.\vec{n} = \vec{0}$.

$$\text{Ici } \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M.\vec{n} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M représente la projection orthogonale sur $\mathcal{D}: y = 2x$.

→ Algèbre (invariant et noyau)

(d) $\det(M) = 0$ M^{-1} n'existe pas

Cohérence: oui car projection orthogonale.

Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1 Ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 2) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ 3) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$ 4) $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$

5) $f(x) = \frac{1}{\cos x - \sin(2x)}$ 6) $f(x) = \ln(1-x)$ 7) $f(x) = \ln(2x^2+3x-2)$ 8) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
 $=]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

3) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 6 \neq 0\}$
 $\Delta = 25 = 5^2 \Rightarrow x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$

$x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$

$\sqrt{x} \text{ définie} \Leftrightarrow x \geq 0$

$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x - 4 \geq 0\}$

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour les valeurs de x extérieures aux racines.

$\Delta = 25 = 5^2 \quad x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$

$x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$

$\mathcal{D}_f =]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$

5) $\mathcal{D}_f = \{x / \cos(x) - \sin(2x) \neq 0\}$

$\cos(x) - \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \sin(2x)$

 $\Rightarrow$ Déjà fait au TD1

$$S: \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} [\frac{2\pi}{3}] \\ x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} [\frac{2\pi}{3}] ; \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$

$$6) f(x) = \ln(1-x)$$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x > 0\}$$

$$1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[$$

$$7) f(x) = \ln(2x^2 + 3x - 2)$$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 2 > 0\}$$

$$\Delta = 25 = 5^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \\ x_2 = \frac{-3+5}{4} = 1/2 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]1/2; +\infty[$$

$$8) f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$$

