

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2; 1)$, $B(2; 4)$, $C(4; -1)$ et $D(1; -3)$.1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.1.2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.1.3 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux? Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils orthogonaux?

$$1.1 \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$1.2. \quad \vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{w}$$

$$1.3. \quad \Delta = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$= 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times (-3) + (-5) \times (-2) = 4$$

 $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Que vaut $\|\vec{u}\|$?

$$\vec{u} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = x^2$
carré scalaire

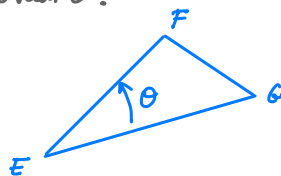
$$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2}$$

① Que vaut $\theta = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CD})$ au signe près.

$$\Delta = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\| \cdot \cos \theta = 4$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{\|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{4}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{13}} = 0,206$$

$$\Rightarrow \theta = \pm \arccos(0,206) = \pm 78,1^\circ = \theta$$

② Que vaut θ ?

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 36$$

$$\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{32}$$

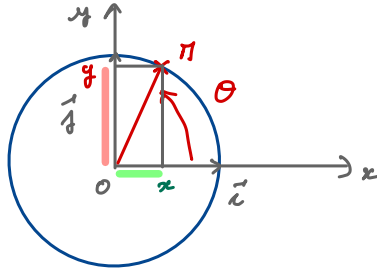
$$\|\overrightarrow{EG}\| = \sqrt{53}$$

$$\cos \theta = \frac{36}{\sqrt{32} \sqrt{53}} = 0,874 \Rightarrow \theta = \pm 29,1^\circ$$

Trigonométrie

- 1.1 Rappeler les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
- 1.2 Établir les formules de $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ ainsi que de $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.
- 1.3 Que permet d'écrire le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique?
- 1.4 Simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.
- 1.5 Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Rappels de trigonométrie :



$$x = \cos \theta$$

$$y = \sin \theta$$

$$1.1 \quad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a \end{cases}$$

$$1.2 \quad \begin{cases} \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin(2a) = 2 \sin a \cos a \end{cases}$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad (1.3)$$

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

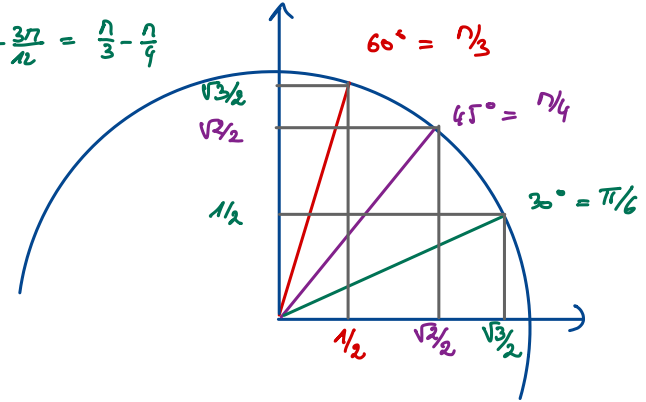
$$= e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

$$e^{A+B} = e^A \times e^B$$

$$① \quad \cos(a-b) = ? \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$② \quad \sin(a-b) = ? \quad \rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$① \quad \frac{\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$



$$1.2 \quad \cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$$

$$= \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\text{En effet } \cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$1.5. \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

→ Exprimer $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \overset{0}{\cancel{\cos \frac{\pi}{2}}} \cdot \overset{1}{\cancel{\cos \theta}} + \overset{1}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2}}} \cdot \overset{0}{\cancel{\sin \theta}} = \sin \theta$
 (1-4) $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos \theta$

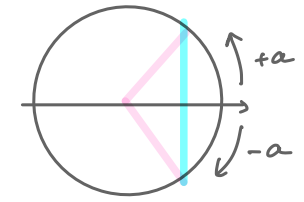
ou $2x = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} + x [2\pi]$
 $x = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$S = \left\{ x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3} \right] \right\} \cup \left\{ x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$

Je peux aussi faire $\cos(\frac{\pi}{2}-2x) = \cos(x)$

$0[2\pi] = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = x [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - 2x = -x [2\pi]$



⇒ Ce sont les mêmes équations 😊

1.6

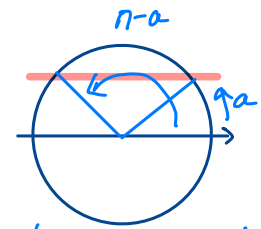
→ Résoudre $\sin(2x) = \cos x$

$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x [2\pi]$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$



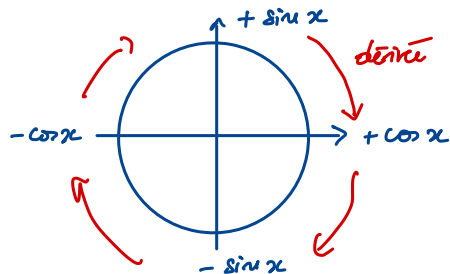
$\sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = \pi - b$
 $b = \pi - a$

Modulo:

$x = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \theta [2\pi]$

$\frac{x}{3} = \frac{\theta}{3} + k \frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{\theta}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$

1.7. Primitives $\cos(2x) : \frac{1}{2} \sin(2x) + k \quad k \in \mathbb{R}$



Primitives de $\cos^2 x :$

$\sin^2 x :$



$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & (1) \\ 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x & (2) \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

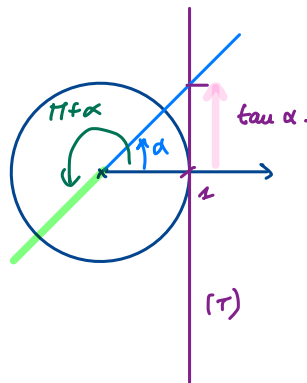
$$\frac{(1)+(2)}{2}$$



$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\frac{(2)-(1)}{2}$$

1.8.



$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan(\pi + \alpha) \\ \tan \alpha &\in]-\infty; +\infty[\end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}$$

$$\text{avec } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \times \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{4} = \frac{8 - 2 \times 2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

← conjugué de $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

Exponentielles et logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

2.1 $e^2 \cdot e^3$; e^4/e^2 ; $(e^{2x})^3$; $\exp(2x) \cdot \exp(-x)$

2.2 $\ln(x) + \ln(2)$; $\ln(4x)$; $\ln(x^3)$; $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2.3 $\exp(\ln(x))$; $\exp(-\ln(x))$; $\exp(x \ln(x))$

Table des logarithmes décimaux entre 1 et 100

N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
1	0	21	1,322 22	41	1,612 78	61	1,785 33	81	1,908 49
2	0,301 03	22	1,342 42	42	1,623 25	62	1,792 39	82	1,913 81
3	0,477 12	23	1,361 73	43	1,633 47	63	1,799 34	83	1,919 08
4	0,602 06	24	1,380 21	44	1,643 45	64	1,806 18	84	1,924 28
5	0,698 97	25	1,397 94	45	1,653 21	65	1,812 91	85	1,929 42
6	0,778 15	26	1,414 97	46	1,662 76	66	1,819 54	86	1,934 5
7	0,845 1	27	1,431 36	47	1,672 1	67	1,826 07	87	1,939 52
8	0,903 09	28	1,447 16	48	1,681 24	68	1,832 51	88	1,944 48
9	0,954 24	29	1,462 4	49	1,690 2	69	1,838 85	89	1,949 39
10	1	30	1,477 12	50	1,698 97	70	1,845 1	90	1,954 24
11	1,041 39	31	1,491 36	51	1,707 57	71	1,851 26	91	1,959 04
12	1,079 18	32	1,505 15	52	1,716	72	1,857 33	92	1,963 79
13	1,113 94	33	1,518 51	53	1,724 28	73	1,863 32	93	1,968 48
14	1,146 13	34	1,531 48	54	1,732 39	74	1,869 23	94	1,973 13
15	1,176 09	35	1,544 07	55	1,740 36	75	1,875 06	95	1,977 72
16	1,204 12	36	1,556 3	56	1,748 19	76	1,880 81	96	1,982 27
17	1,230 45	37	1,568 2	57	1,755 87	77	1,886 49	97	1,986 77
18	1,255 27	38	1,579 78	58	1,763 43	78	1,892 09	98	1,991 23
19	1,278 75	39	1,591 06	59	1,770 85	79	1,897 63	99	1,995 64
20	1,301 03	40	1,602 06	60	1,778 15	80	1,903 09	100	2

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^b = b \ln a$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{(a-b)}$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

Exponentielles et logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

2.1 $e^2 \cdot e^3$; e^4/e^2 ; $(e^{2x})^3$; $\exp(2x) \cdot \exp(-x)$

$$e^5 \quad e^4 \cdot e^{-2} = e^2 \quad e^{3 \times 2x} = e^{6x} \quad e^{2x-x} = e^x$$

2.2 $\ln(x) + \ln(2)$; $\ln(4x)$; $\ln(x^3)$; $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$\ln(2x) \quad \ln 4 + \ln x \quad 3 \ln x \quad \ln(x^{-2}) = -2 \ln x$$

2.3 $\exp(\ln(x))$; $\exp(-\ln(x))$; $\exp(x \ln(x))$

$$x \text{ in } x > 0 \quad \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad (e^{\ln x})^x = x^x \quad x > 0$$

2.4. $\ln(x e^x) = \ln x + \ln(e^x) = \ln x + x$

Systèmes d'équations

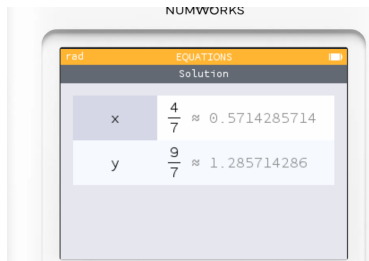
4.1 Résoudre les systèmes d'équations suivants à la calculatrice

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \quad (S_1)$$

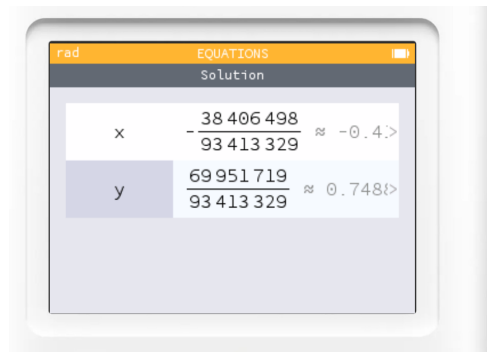
$$\begin{cases} \frac{7}{13}x + \frac{11}{17}y = \frac{5}{19} \\ \frac{23}{29}x - \frac{31}{37}y = -\frac{41}{43} \end{cases} \quad (S_2)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ -x + 4y - z = 2 \end{cases} \quad (S_3)$$

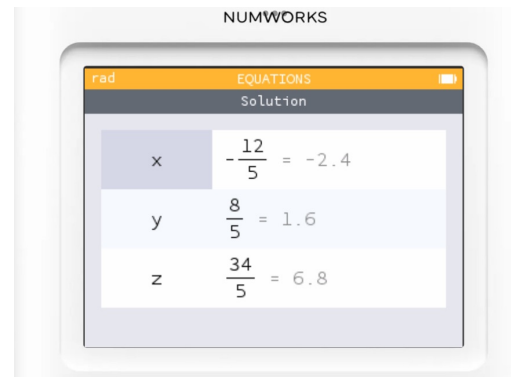
(S₁)



(S₂)



(S₃)



Trinôme du second degré

3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

— $3x^2 - 4x + 1 = 0$;

— $2x^2 - 2x + 4 = 0$

3.2 Factoriser

— $P(x) = x^2 - 3x - 4$;

— $Q(x) = x^2 + 4x - 21$

Discriminant: $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = d^2$$

$$x = \frac{-b \pm d}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + d}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - d}{2a}$$

Factorisation: Si $\deg(P) = n$ alors $P(x) = 0$
admet n solutions dans $\mathbb{C}$.

Ce sont les racines de P .

$$\Rightarrow P(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 = 2^2$$

$$x_1 = \frac{+4 - 2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{+4 + 2}{6} = 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1)(x - \frac{1}{3})$$

$$2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times 2 = -28 = (i\sqrt{28})^2 = (i2\sqrt{7})^2$$

conjugues

$$x_1 = \frac{+2 - i2\sqrt{7}}{2 \times 2} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}$$
$$x_2 = \frac{2 + i2\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}$$

3.2 Factoriser

— $P(x) = x^2 - 3x - 4;$

— $Q(x) = x^2 + 4x - 21$

$$P(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$\Delta = 25 = 5^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{3+5}{2} = 4 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{racines} \\ \text{de } P \end{array} \right\}$$

$$P(x) = (x+1)(x-4)$$

$$Q(x) = x^2 + 4x - 21 \quad \Delta = 100 = 10^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-4-10}{2} = -7 \\ x_2 = \frac{-4+10}{2} = 3 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{racines} \\ \text{de } Q \end{array} \right\}$$

$$Q(x) = (x+7)(x-3)$$

Intégrales

Intégrer $\int_0^1 (x^2 - 1) dx$ et $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$

$$I = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \cancel{(0 - 0)} = \underline{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx$$

(1.7)

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} + \left[\cancel{\frac{\sin(2x)}{4}} \right]_0^{2\pi} \\ &= \underline{\pi}. \end{aligned}$$

Outils mathématiques 1 — TD 1 : Géométrie dans le plan

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2; 1)$, $B(2; 4)$, $C(4; -1)$ et $D(1; -3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$.

1.2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{CD}$.

1.3 Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont-ils orthogonaux ? Les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$ sont-ils orthogonaux ?

$$1.1 \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$1.2. \quad \vec{w} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{CD} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{w}$$

$$1.3. \quad \Delta = \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = x \cdot x' + y \cdot y'$$

$$= 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times (-3) + (-5) \times (-2) = 4$$

$\vec{BC}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas orthogonaux.

1.4 Calculer les normes des vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AC}$.

1.5 Calculer le produit scalaire $s = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$ et en déduire au signe près la valeur de l'angle $\theta = (\vec{AC}, \vec{AD})$.

1.6 Déterminer le signe de θ ainsi que la surface du triangle ACD à l'aide du déterminant.

$$1.4 \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AD}\| = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

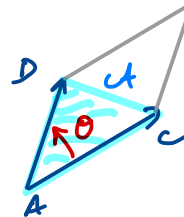
$$1.5. \quad s = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \cos \theta$$

$$= 26 = 5 \times 2\sqrt{10} \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{26}{5 \times 2\sqrt{10}} = 0,822$$

$$\Rightarrow \theta = \pm \arccos(0,822) = \pm 34,7^\circ$$

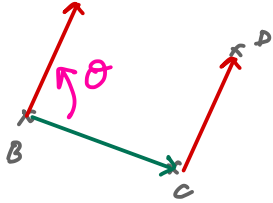
$$1.6 \quad \det(\vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 6 \times (-4) - (-2) \times 3$$



$$= -18 \rightarrow \theta < 0 \Rightarrow \theta = -34,7^\circ$$

(Sup) et aire de (BCD) + signe de $\theta = \pm 78,1$
avec $\theta = (\widehat{\vec{BC}; \vec{CD}})$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$\det(\vec{BC}; \vec{CD}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -19$$

$$\Rightarrow \text{ct} = 95,44$$

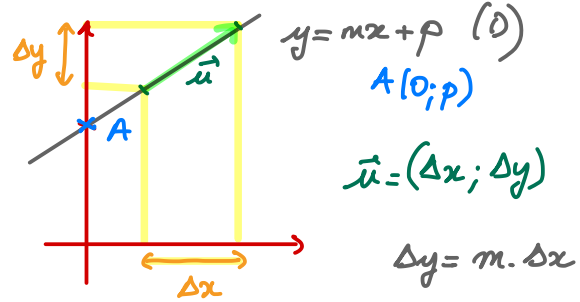
$$\theta = (\widehat{\vec{BC}; \vec{CD}}) < 0 \Rightarrow \theta = -78,1^\circ$$

2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.

$$y = mx + p \rightarrow \vec{u} = (1; m) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = (m; -1) \quad \text{ou} \quad \vec{n} = (-m; 1)$$



$$\Rightarrow \vec{u} = (\Delta x; m\Delta x) = \Delta x(1; m)$$

$$\Rightarrow \vec{u} = (1; m) \text{ est directeur de } (D)$$

2. Droites et cercles du plan

- 2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.
 2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.
 2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :
 (a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;
 (b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :
 (i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0,5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.1 et 2.2 lecture droite

2.1 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 - $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.3 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}_1 = (1; -2)$ $\vec{u}_2 = (1; -0,5)$ $\vec{u}_3 = (1; 2)$

$\vec{u}_2 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 \perp \vec{u}$
 $\Rightarrow D_2 \perp D$

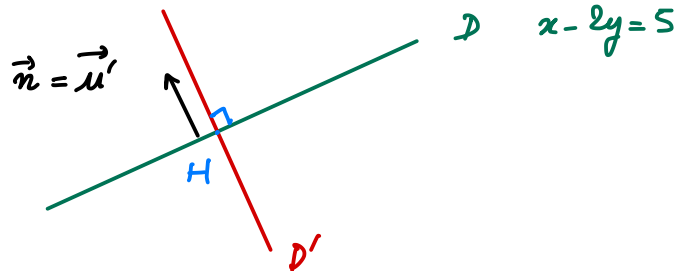
Rq: $\vec{u} = (1; m)$ $\vec{u}' = (1; m')$
 $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 + mm' = 0$

$\Rightarrow D' \perp D \Leftrightarrow m' = -1/m$

- 2.4 Donner l'équation cartésienne de la droite passant par $H(-2; 1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$.

(D)

(D')



$\vec{n} = (1; -2) = \vec{u}' \Rightarrow \vec{n}' = (2; 1)$

$\Rightarrow 2x + y + c = 0$

$2x(-2) + 1 + c = 0 \Rightarrow c = 3$

$\Rightarrow D': 2x + y + 3 = 0$

Autre méthode:

$$D' = \{ M(x; y) / \overrightarrow{HM} \perp \vec{u} \}$$

$$\vec{u} = (2; 1) \quad \overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HM} \perp \vec{u} &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 \Leftrightarrow 2(x+2) + 1(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 4 + y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0 \quad \text{😊} \end{aligned}$$

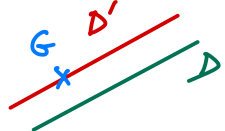
Autre méthode: $D' = \{ M(x; y) / \overrightarrow{HM} // \vec{n} \}$

$$\overrightarrow{HM} // \vec{n} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{HM}; \vec{n}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = (x+2)(-2) - (y-1)1 \stackrel{\text{eq.}}{=} 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -2x - 4 - y + 1 &= 0 \\ -2x - y - 3 &= 0 \quad \text{😊} \end{aligned}$$

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2; -3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x + 3$.

$$D': y = -2x + p$$

$$D' // D$$

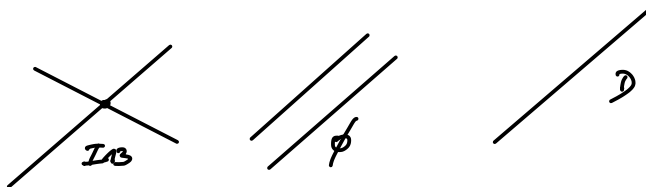
$$G \in D' \Leftrightarrow -3 = -2 \times 2 + p \Rightarrow p = 1$$

$$D': y = -2x + 1$$

2.6 Déterminer les intersections deux à deux des droites suivantes :

- D_1 d'équation : $2x + y - 3 = 0$
- D_2 passant par $A(0; 3)$ et $B(3; 5)$
- D_3 d'équation : $4x - y = 6$

$$I_{13} = D_1 \cap D_3$$



$$I_{13} \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (1) \\ 4x - y - 6 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$6x - 9 = 0 \quad (1) + (3)$$

$$x = 9/6 = 3/2$$

$$(1) \Rightarrow 2 \times \frac{3}{2} + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow I_{13} \left(\frac{3}{2}; 0 \right)$$

$$D_2: 2x - 3y + 9 = 0 \rightarrow I_{12} \quad I_{23}.$$

$$D_2 = (AB) \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + c = 0$$

$$A \in (AB) \Rightarrow 2 \times 0 - 3 \times 3 + c = 0 \Rightarrow c = 9$$

$$D_2: 2x - 3y + 9 = 0$$

$$I_{12} \begin{cases} 2x + y = 3 & (1) \\ 2x - 3y = -9 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \quad 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 0$$

$$I_{12} (0; 3)$$

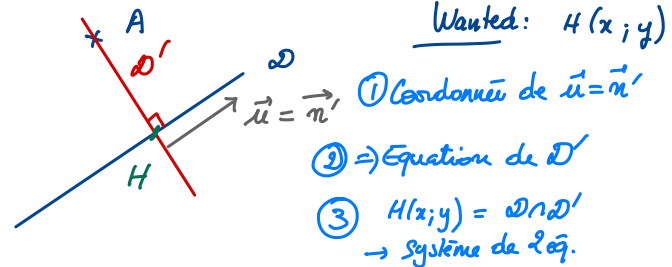
$$I_{23} \begin{cases} 2x - 3y = -9 & (2) \\ 4x - y = 6 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \times 2 - (3) \quad -5y = -24 \Rightarrow y = \frac{24}{5} = 4,8$$

$$(2) \Rightarrow x = \frac{3y - 9}{2} = \frac{3 \times 4,8 - 9}{2} = 2,7$$

$$\Rightarrow I_{23} (2,7; 4,8)$$

2.7 Déterminer la projection orthogonale de $A(5; -2)$ sur la droite D d'équation $y = -3x + 4$.



$$\textcircled{1} \vec{u} = (1; -3) = \vec{n}'$$

$$\textcircled{2} x - 3y + c = 0 \quad \text{Or } A \in \mathcal{D}'$$

$$5 - 3(-2) + c = 0 \Rightarrow c = -11$$

$$\Rightarrow x - 3y - 11 = 0$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} y = -3x + 4 & (1) \\ x - 3y - 11 = 0 & (2) \end{cases}$$

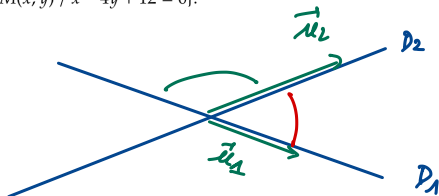
Je substitue $x - 3(-3x + 4) - 11 = 0$

$$\Rightarrow x + 9x - 12 - 11 = 0 \Rightarrow 10x - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2,3$$

$$(1) \Rightarrow y = -3(2,3) + 4 = -2,9 \Rightarrow H(2,3; -2,9)$$

2.8 Donner une mesure de l'angle θ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x; y) / y = 3x + 2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x; y) / x - 4y + 12 = 0\}$.



$$\vec{u}_1 = (1; 3)$$

$$\vec{n}_2 = (1; -4)$$

$$\Rightarrow \vec{u}_2 = (4; 1)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|} = \frac{7}{\sqrt{10} \sqrt{17}} = 0,537$$

$$\Rightarrow \theta = \pm 57,5^\circ \quad \text{ou} \quad \theta = \pm 123^\circ$$

2.9 Déterminer l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $C(1; -4)$ et de rayon 7.

$$\mathcal{C}: (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 49$$

2.10 Parmi les trois équations suivantes, lesquelles sont des équations de cercles :

a) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$; b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$

$$d) x^2 - 4x + y^2 - 4y + 9 = 0$$

a) Cercle de centre $(3; -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

$$b) x^2 - 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0$$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ est l'éq. du cercle de centre $(1; -2)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

$$(c) (x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 3$$

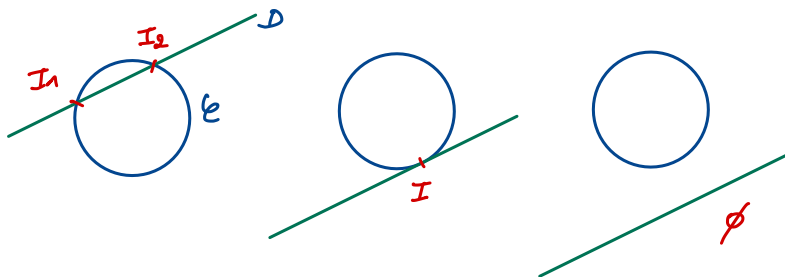
Cercle de centre $(-1; -2)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

$$(d) x^2 - 4x + y^2 - 4y + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = -1$$

n'est PAS une équation de cercle.

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1; 1)$ et $B(0; -1)$ et du cercle de centre $C(2; 0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB , ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.



Étapes : pour déterminer $I(x; y)$

① Je détermine l'éq. de droite

② Je détermine l'éq. du cercle

③ Résolution du système de 2 éq. à 2 inconnues

$$\textcircled{1} \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u} \Rightarrow y = 2x + p$$

$$B \in D \Rightarrow -1 = p \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$\textcircled{2} (x-2)^2 + (y-0)^2 = 3^2$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} y = 2x - 1 \\ (x-2)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + (2x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 8x - 4 = 0 \quad \Delta = 144 = 12^2$$

$$x_1 = \frac{-8-12}{10} = -0,4 \Rightarrow y_1 = 2 \times (-0,4) - 1 = -1,8$$

$$\Rightarrow I_1(-0,4; -1,8)$$

$$x_2 = \frac{-8+12}{10} = 0,4 \Rightarrow y_2 = 2 \times 0,4 - 1 = -0,2$$

$$\Rightarrow I_2(0,4; -0,2)$$

Triangle OAB $\rightarrow$ Aire A $\det(\vec{OA}; \vec{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$A = \frac{|-1|}{2} = 0,5 u_A$

$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \pm 135^\circ$ or $\det(\vec{OA}; \vec{OB}) < 0$

$\Rightarrow \theta = -135^\circ$



(c) $x_G = \frac{p_A x_A + p_B x_B + p_C x_C}{p_A + p_B + p_C} = \frac{1 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 4}{1 + 3 + 2} = \frac{11}{6}$

$y_G = \frac{p_A y_A + p_B y_B + p_C y_C}{p_A + p_B + p_C} = \frac{1 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times 0}{1 + 3 + 2} = 1$

$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow G\left(\frac{11}{6}; 1\right)$

$y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{4}{3}$

$I\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$

3. Barycentres

3.1 Le barycentre de n points M_i de poids respectifs p_i est le point G vérifiant la relation

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot \vec{GM}_i = \vec{0}$$

- (a) Établir la relation entre les coordonnées de G et celles des points M_i ?
(b) Que devient cette dernière relation si G est l'isobarycentre des points ?

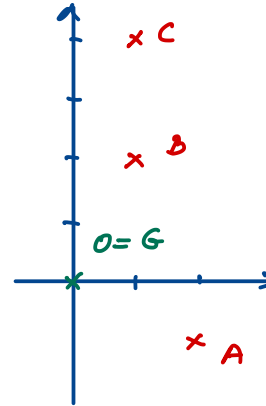
~~cf Cours~~

(c) Calculer les coordonnées du barycentre G et de l'isobarycentre I du triangle formé par les points $A(0;3)$, $B(1;1)$ et $C(4;0)$ affectés respectivement des poids 1, 3 et 2.

3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2;-1)$, en $B(1;2)$ et en $C(1;4)$.

- (a) Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine ? On appellera le point D .
(b) Où se situe le barycentre si l'on place en ce point D une masse de 2 kg ?

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A , et calculer l'aire du triangle ABC .



WANTED: Quelles coordonnées pour $D(4\text{kg})$ pour que $G = O$?

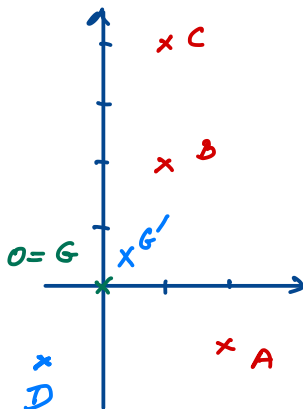
$$7x_G = 0 = \frac{2+1+1+4x_D}{7}$$

$$7y_G = 0 = \frac{-1+2+4+4y_D}{7}$$

$$4x_D = -4 \Rightarrow x_D = -1$$

$$\text{et } 4y_D = -5 \Rightarrow y_D = -\frac{5}{4} = -1,25$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} D(-1; -1,25)$$



Wanted: $G'(x; y)$ barycentre de $A(1)$, $B(1)$, $C(1)$ et $D(2)$

$$x_G' = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C + 2x_D}{5} = \frac{2+1+1+2 \times (-1)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$y_G' = \frac{1y_A + 1y_B + 1y_C + 2y_D}{5} = \frac{-1+2+4+2 \times (-1,25)}{5} = 0,5$$

$$\Rightarrow G'(0,4; 0,5)$$

3.3 Soient les points $A(1; -2)$ et $B(2; 0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A , et calculer l'aire du triangle ABC .

A x B

①

$\vec{AB}$

②

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ et $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$
 $\rightarrow \vec{AC}_1$ et $\vec{AC}_2$

③

$\det(\vec{AB}; \vec{AC}_1)$

④

$\vec{AC} \rightarrow C$

3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2; -1)$, en $B(1; 2)$ et en $C(1; 4)$.

- Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine? On appellera le point D .
- Où se situe le barycentre si l'on place en ce point D une masse de 2 kg?

$$\textcircled{1} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{AC_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \det(\vec{AB}, \vec{AC_1}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

ABC_1 est direct. $\Rightarrow C_1 = C$

$$\textcircled{4} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C + 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x_C - 1 \\ 1 = y_C + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = -2 + 1 = -1 \\ y_C = 1 - 2 = -1 \end{cases} \quad \underline{C(-1; -1)}$$

$$I_{ABC} = \frac{1}{2} \times 5 = \underline{2,5 \mu A}.$$

Q_{sup}) $A(2; -1) \quad B(1; 2) \quad C(1; 4)$
Surface de ABC

$$\theta = (\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}})$$

Je travaille avec $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$.

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{CA}, \vec{CB}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Rightarrow I_{ABC} = 1 \mu A$$

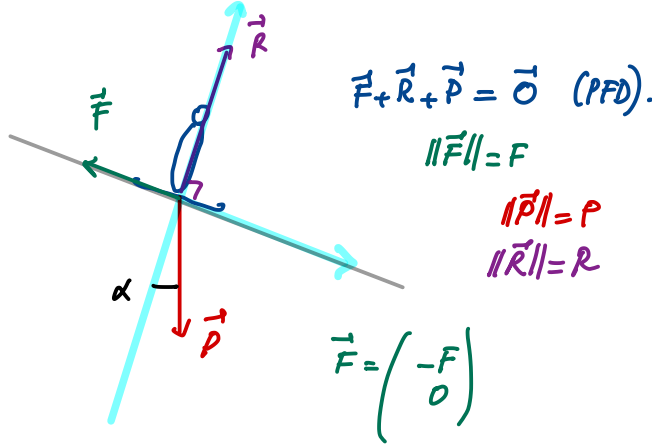
$$\cos \theta = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\|} = \frac{10}{\sqrt{26} \cdot 2} = 0,981$$

$$\theta = \pm 11,3^\circ \Rightarrow \underline{\theta = -11,3^\circ}$$

4. Application en physique

Un skieur de masse totale $m = 90 \text{ kg}$, tout équipement compris, descend une piste inclinée d'un angle $\alpha = 10^\circ$ par rapport à l'horizontale. Sa vitesse étant constante, on choisit de modéliser l'ensemble des frottements qu'il subit par une force unique $\vec{F}$ ayant la même direction que le mouvement du skieur mais de sens opposé. On peut modéliser le skieur par un solide en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Après avoir tracé les vecteurs modélisant les différentes forces mises en jeu, déterminer leurs coordonnées et en déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{F}$.



$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} P \sin \alpha \\ -P \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -F + P \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F = P \sin \alpha = mg \sin \alpha = 90 \times 9,81 \times \sin(10^\circ)$$

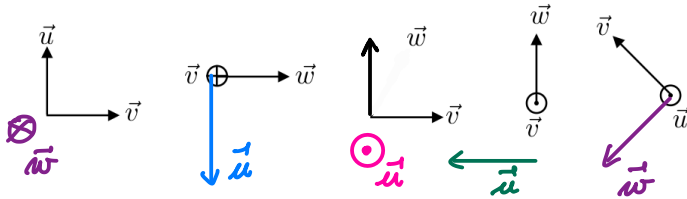
$$F = 153 \text{ N}$$

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

Dans toute cette feuille, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Produits scalaire, vectoriel et mixte

1.1 Soient trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Dessiner les vecteurs manquants dans les cinq cas représentés ci-dessous.



$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ direct}$$

1.2 On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$:

(a) donner leurs coordonnées;

(b) calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ puis $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif?

$$\begin{aligned} \vec{b} \wedge \vec{c} &= (\vec{i} + \vec{k}) (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= \vec{i} \wedge \vec{i} + \vec{i} \wedge \vec{j} + \vec{i} \wedge \vec{k} + \vec{k} \wedge \vec{i} + \vec{k} \wedge \vec{j} + \vec{k} \wedge \vec{k} \\ &= \vec{0} + \vec{k} + (-\vec{j}) + \vec{j} + (-\vec{i}) + \vec{0} \\ &= -\vec{i} + \vec{k} \end{aligned}$$

→ À faire avec les coordonnées

$$a) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{a} + \vec{k} \quad \text{😊}$$

$$b) \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$$

$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ ne veut rien dire

1.3 On considère les vecteurs $\vec{u} = (3; 1; -2)$, $\vec{v} = (2; 0; 1)$ et $\vec{w} = (1; 1; 4)$:

- (a) calculer leurs normes;
- (b) calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$;
- (c) calculer les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w})$;

$$(a) \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{14} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{5} \quad \vec{w} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$(b) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = -4$$

$$(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -33$$

$$(c) \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 + 3 \\ 0 + 3 \\ 2 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -35 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- (d) calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ et indiquer si le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct ou indirect.
- (e) Le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u} + 2\vec{v}$ et est unitaire : calculer les coordonnées de $\vec{a}$.

① j'écris $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans l'ordre en commençant par celui que je veux

② Je pose 1 ou -1 → 1^{ère} opération

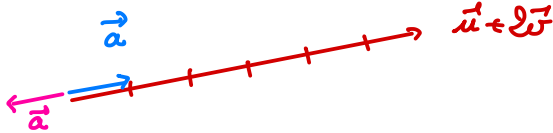
③ Je fais le scalaire du résultat.

$$m = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 - 7 - 2 \times 4 = -14$$

$(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est indirect car $-14 < 0$

Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vaut 14 uv .

(e) $\vec{a}$ est unitaire $\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = 1$



$$\vec{a} = k(\vec{u} + 2\vec{v}) \text{ avec } k < 0.$$

$$\|\vec{a}\| = |k| \|\vec{u} + 2\vec{v}\| = 1$$

$$\Rightarrow |k| = \frac{1}{\|\vec{u} + 2\vec{v}\|}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \pm \frac{\vec{u} + 2\vec{v}}{\|\vec{u} + 2\vec{v}\|}$$

deux

$$\begin{aligned} \vec{a} &= + \frac{\vec{u} + 2\vec{v}}{\|\vec{u} + 2\vec{v}\|} \text{ avec } \vec{u} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exo Sup:

Soit $\vec{v} = (4; -3; 0)$ Trouver $\vec{u}$ unitaire et opposé à $\vec{v}$.

$$\vec{u} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Objets de l'espace et calculs de grandeurs

2.1 À partir des résultats de l'exercice précédent: 1.3 :

- déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- donner une mesure au signe près de l'angle $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.

$$(a) \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle \quad \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{14} \sqrt{5}} = 0,478$$

$$\Rightarrow \theta = \pm 61,4^\circ$$

2.2 Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{OB} = -\vec{i} + 4\vec{k}$ et donner une mesure au signe près de l'angle (AOB) .

2.3 On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$:

- déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan ABC ;
- calculer l'aire du triangle ABC ;
- calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

$$2.2. \quad \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\|} = \frac{11}{\sqrt{35} \sqrt{17}} = \cos \theta = 0,451 \Rightarrow \theta = \pm 63,2^\circ$$

$$A = \|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\| \quad \vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \sqrt{400 + 49 + 25} = \sqrt{474} = 21,8 \mu_A = A$$

$$2.3. \quad (a) \quad \vec{n} = \frac{\vec{AB} \wedge \vec{AC}}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ +3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{n} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rq: $-\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est aussi valable.

$$(b) \quad A = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2} = 3,5 \mu_A.$$

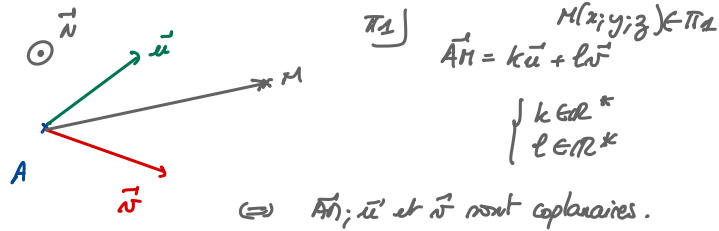
$$(c) \quad N = |m| \quad m = [\vec{OA}; \vec{OB}; \vec{OC}] = (\vec{OA} \wedge \vec{OB}) \cdot \vec{OC} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$$

$$\Rightarrow N = 6 \mu_V$$

2.4 Déterminer une équation cartésienne :

- du plan Π_1 passant par $A(1; 1; 1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (2; 0; 1)$ et $\vec{v} = (0; 1; 2)$;
- du plan Π_2 passant par $B(1; 0; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2; 1; 1)$.

(a) Wanted: Eq cartésienne $ax+by+cz+d=0$ de π_1 .



$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow [\vec{AM}; \vec{u}; \vec{v}] = 0. \\ & = \vec{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0. \end{aligned}$$

$$\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AM} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x+1-4y+4+2z-2=0$$

$$\Leftrightarrow -x-4y+2z+3=0 : \pi_1$$

(b) M est tel que $\vec{BM} \cdot \vec{n} = 0$ $\pi(x; y; z) \in \pi_2$



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{BM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = 2x-2+y+z-1=0$$

$$\Leftrightarrow \pi_2 : 2x+y+z-3=0$$

Autre méthode: $\vec{n} \Rightarrow \pi_2 : 2x+y+z+d=0$

$$B \in \pi_2 \Rightarrow 2x(1) + 1y(0) + 1z(1) + d = 0 \Rightarrow d = -3.$$

2.5 Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ de l'exercice précédent.

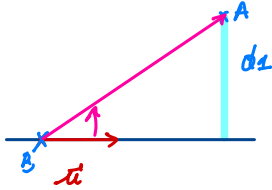
$$V = |\mu| \quad \mu = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$\Rightarrow V = 4 \mu V$$

2.6 On considère :

- le point A de coordonnées $(2; 0; 5)$;
- la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(0; -2; -4)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(2; 1; 0)$;
- le plan Π d'équation $x + y + 2z - 5 = 0$.

- Calculer les distances d_1 de A à $\mathcal{D}$ et d_2 de A à Π à l'aide des produits scalaires et vectoriels.
- La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan Π ?
- Déterminer les équations d'une droite parallèle à Π et passant par A . Cette droite est-elle unique?



$$d_1 = \frac{\|\vec{BA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

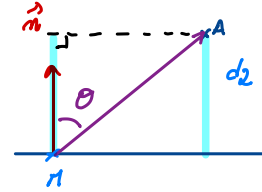
$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 0 + 2 \\ 5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{5}$$

$$\vec{BA} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ +18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{BA} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{409}$$

$$d_1 = \frac{\sqrt{409}}{\sqrt{5}} \approx 9,04 \text{ uL} = d_1$$



$$d_2 = \frac{|\vec{rA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

au choix dans Π .

$$\vec{rA} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 0 - 2 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{rA} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{6}$$

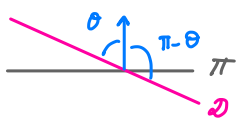
$$d_2 = \frac{7}{\sqrt{6}} = 2,86 \text{ uL} = d_2$$

(b) La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan Π ?

(c) Déterminer les équations d'une droite parallèle à Π et passant par A . Cette droite est-elle unique?

$$(b) \mathcal{D} // \Pi \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{or } \vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 0. \Rightarrow \text{Non } \Pi \text{ et } \mathcal{D} \text{ ne sont pas parallèles}$$



$$\varphi: \theta \in [0; 90^\circ]$$

Angle à la normale ?

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = 0,548 \Rightarrow \theta = 56,8^\circ$$

(c) Je veux $\vec{v} \perp \vec{n}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ pas unique}$$

$$\vec{w} = t\vec{v} \Leftrightarrow t \in \mathcal{D}'$$

$$\begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = 1t + 0 \\ z = -1t + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t \\ z = -t + 5 \end{cases}$$

$$\text{J'aurais pu choisir } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t \\ z = t + 5 \end{cases}$$

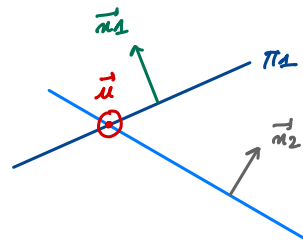
$\rightarrow$ Infinité de solutions.

$\mathcal{D}'$ n'est pas unique.

3. Intersections d'ensembles

3.1 Donner une valeur approchée à trois chiffres significatifs du point d'intersection des trois plans définis par les équations suivantes :

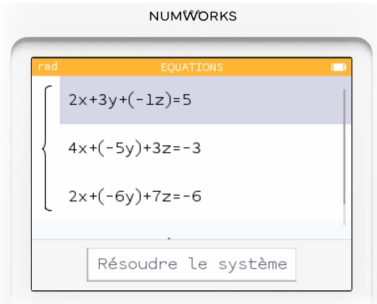
$$\Pi_1: 2x + 3y - z - 5 = 0; \Pi_2: 4x - 5y + 3z + 3 = 0; \Pi_3: 2x - 6y + 7z + 6 = 0$$



$$\Pi_3 / \vec{n}_3 \cdot \vec{u} \neq 0.$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = I(x; y; z)$$

⚠ "ordre et données."



$$\begin{cases} x = 0,744 \\ y = 1,14 \\ z = -0,0930 \end{cases}$$

EQUATIONS		
Solution		
x	$\frac{32}{43}$	≈ 0.7441860465
y	$\frac{49}{43}$	≈ 1.139534884
z	$-\frac{4}{43}$	≈ -0.09302325

$$\mathcal{D}_1 \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \vec{u}_1 \text{ et } \vec{v}_2 \text{ ne sont pas colinéaires}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles.

$$\begin{cases} x = 2t + 2 = 3t + 1 & t_1 \\ y = -t - 2 = 2t - 5 & t_2 \\ z = 3t - 1 = -t + 3 & t_3 \end{cases}$$

$$I = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = t_3.$$

$$\underline{\underline{\text{ES}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{array} \right. \quad \text{I existe pour } t = 1. \quad \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{array}$$

$$= I \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires

3.2 Soient les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t - 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 5 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- montrer que ces droites sont dans le même plan en déterminant les coordonnées de leur intersection;
- donner une mesure de l'angle qu'elles forment.

$$\mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_2 \text{ forment un plan} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D}_1 \not\parallel \mathcal{D}_2 \\ \text{ou} \\ \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = I. \end{cases}$$

Soient les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t - 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 5 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) montrer que ces droites sont dans le même plan en déterminant les coordonnées de leur intersection;

(b) donner une mesure de l'angle qu'elles forment.

(c) Eq du plan ?

$$(b) \quad \cos \theta = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{14}$$

$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{1}{14}\right) = \pm 85,9^\circ = \theta$$

$$(c) \quad \vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$-5x + 11y + 7z + d = 0$$

$$M \in \mathcal{D}_1 \quad M \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow -10 - 22 - 7 + d = 0 \Rightarrow d = 39$$

$$\text{ou } M \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } I \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.3 On considère :

— le plan Π d'équation $3x - 2y + 4z + 5 = 0$

— la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t + 4 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Déterminer le point d'intersection ou bien, s'il n'existe pas, la distance entre Π et $\mathcal{D}$.

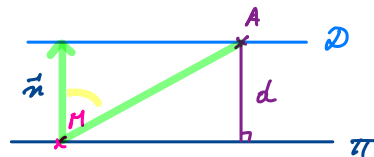
$$I = \Pi \cap \mathcal{D} \quad \text{ET} \quad \begin{cases} 3x - 2y + 4z + 5 = 0 & (1) \\ x = -2t - 1 & (2) \\ y = 3t + 4 & (3) \\ z = 3t - 1 & (4) \end{cases}$$

$$(2)(3)(4) \rightarrow (1) \Rightarrow 3(-2t-1) - 2(3t+4) + 4(3t-1) + 5 \stackrel{\text{eq.}}{=} 0$$

$$\cancel{-6t} - 3 - \cancel{6t} - 8 + \cancel{12t} - 4 + 5 \stackrel{\text{eq.}}{=} 0$$

$$\quad \quad \quad -10 \stackrel{\text{eq.}}{=} 0 \quad (\Rightarrow t \in \emptyset)$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{D} \parallel \Pi}$$



$$d = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MA} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 4-1 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -10$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{29}$$

$$d = \frac{10}{\sqrt{29}} = 1,86 \text{ uL} \approx d$$

3.4 Soit la droite $\mathcal{D}$ décrite par les équations paramétrées :

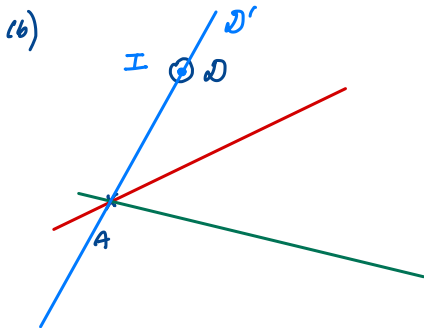
$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) déterminer une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine ;
 (b) déterminer des équations paramétrées de la droite $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ passant par le point $A(1; 2; 3)$ et coupant la droite $\mathcal{D}$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

$$(a) \quad x + y + 2z = 0.$$

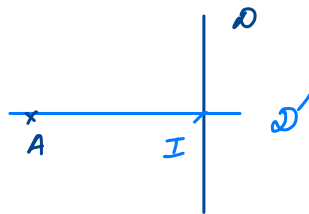
$$\vec{u}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}_\Pi$$

$$O \in \Pi \quad 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$$



$$I = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$$

Wanted: $\vec{u}' = \vec{AI}$



$I = \mathcal{D}' \cap \mathcal{D}$ à déterminer

$$I = \Pi' \cap \mathcal{D}$$

① Eq. de $\Pi' \perp \mathcal{D}$ passant par A.

② $I = \Pi' \cap \mathcal{D}$

③ $\vec{AI} \Rightarrow \mathcal{D}' = \{M / \vec{AM} = t \cdot \vec{AI}\}$

① $\Pi' : x + y + 2z + d = 0$

$$A \in \Pi' : 1 + 2 + 6 + d = 0 \Rightarrow d = -9$$

$$\underline{\Pi' : x + y + 2z - 9 = 0}$$

② $\begin{cases} x + y + 2z - 9 = 0 & (1) \\ x = t + 1 & (2) \\ y = t & (3) \\ z = 2t - 1 & (4) \end{cases} \Rightarrow (t+1) + t + 2(2t-1) - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow 6t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5/3$$

$$\Rightarrow I : x = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3} \Rightarrow I \begin{pmatrix} 8/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{5}{3}$$

$$z = \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3}$$

$$③ \quad \vec{AI} = \begin{pmatrix} 8/3 & -1 \\ 5/3 & -2 \\ 7/3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

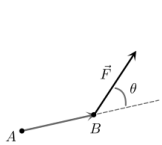
$$\Rightarrow \mathcal{D}' : \begin{cases} x = \frac{5}{3}t + 1 \\ y = -\frac{t}{3} + 2 \\ z = -\frac{2t}{3} + 3 \end{cases}$$

Application en physique

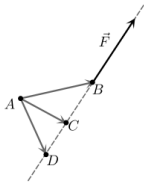
4.1 Le moment $\vec{M}$ de la force $\vec{F}$ appliquée en B par rapport à un point A donné est une grandeur physique vectorielle qui quantifie l'aptitude de cette force à faire tourner le système mécanique autour de ce point A . Celui-ci se calcule au travers de la relation

$$\vec{M} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

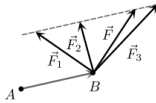
et le sens de $\vec{F}$ permet de déterminer le sens de rotation à l'aide de la règle du tournevis.



(a) Moment d'une force



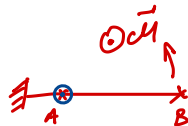
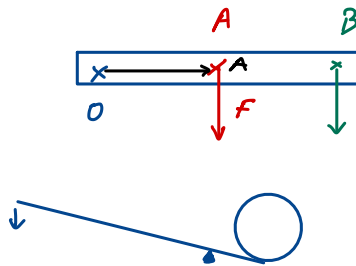
(b) Différents points d'application



(c) Différentes forces

À l'aide de la figure ci-dessus :

- montrer que le moment est le même pour les points d'application B , C et D (volet (b)) et conclure;
- montrer que le moment est le même quelle que soit la force reportée dans le volet (c) et conclure.



$$(6) \quad m_g \quad \mathcal{M}_F = \mathcal{M}_{\vec{F}_1} = \mathcal{M}_{\vec{F}_2} = \mathcal{M}_{\vec{F}_3}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\vec{F}_1} &= \vec{AB} \wedge \vec{F}_1 = \vec{AB} \wedge (\vec{F} + k\vec{AB}) \\ &= \vec{AB} \wedge \vec{F} + k\vec{AB} \wedge \vec{AB} = \vec{AB} \wedge \vec{F} \end{aligned}$$



$\Rightarrow$ Mécanique.

1. Coordonnées du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants, repérés soit en coordonnées cartésiennes $(x; y)$, soit en coordonnées polaires $(r; \theta)$:

$$A(r = 3,5; \theta = 40^\circ) ; B(x = 2; y = 2,5) ; C(r = 4; \theta = 35^\circ) ; D(r = 5; \theta = \pi/12) ; E(x = -1; y = 3) ; \\ F(r = 3; \theta = 125^\circ) ; G(r = 1,5; \theta = -20^\circ) ; H(x = 2; y = -1) ; I(r = 3,5; \theta = -2\pi/3)$$

	Coordonnées cartésiennes		Coordonnées polaires	
	x	y	r	θ
A	2,68	2,25	3,5	40°
B	2	2,5	3,20	$51,3^\circ$
C	3,28	2,29	4	35°
D	4,23	1,29	5	$\pi/12 = 15^\circ$
E	-1	3	3,16	108°
F	-1,72	2,46	3	125°
G	1,41	-0,543	1,5	-20°
H	2	-1	2,24	$-26,6^\circ$
I	-1,75	-3,03	3,5	$-2\pi/3$

- D G
- quel point est le plus éloigné de l'origine, et quel le point en est le plus proche ;
 - quels points sont plus proches de l'origine que le point B ; E F G et H
 - le point le plus haut, le plus bas, le plus à droite et le plus à gauche du plan ;
 - le point le plus proche de l'axe des abscisses, et le point le plus proche de l'axe des ordonnées.

le plus haut $y_{\max} : F$
le plus bas $y_{\min} : I$

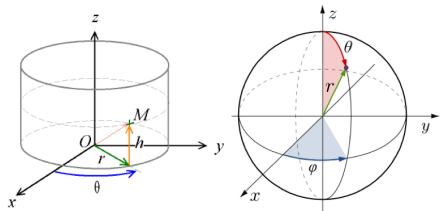
le plus à droite $x_{\max} : D$
le plus à gauche $x_{\min} : I$

le plus proche de (Ox) $|y|_{\min} : G$

le plus proche de (Oy) $|x|_{\min} : E$

2. Coordonnées de l'espace

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. La figure ci-dessous rappelle les variables utilisées pour repérer un point en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.

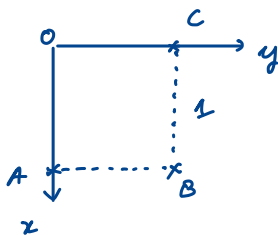
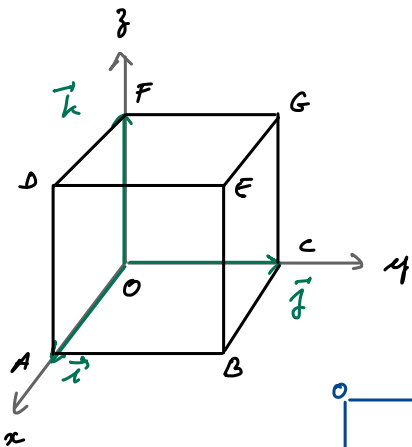


À gauche : Coordonnées cylindriques

À droite : Coordonnées sphériques

Fig. 1 : Systèmes de coordonnées dans l'espace

2.1 Calculer les coordonnées **sphériques**, puis **cylindriques**, des sommets du cube de côté 1 et dont les vecteurs du repère forment trois arêtes.



Point	Cartésiennes $(x; y; z)$	Cylindriques $(r; \theta; z)$	Sphériques $(r; \theta; \varphi)$
A	$(1; 0; 0)$	$(1; 0; 0)$	$(1; 90^\circ; 0^\circ)$
B	$(1; 1; 0)$	$(\sqrt{2}; 45^\circ; 0)$	$(\sqrt{2}; 90^\circ; 45^\circ)$
C	$(0; 1; 0)$	$(1; 90^\circ; 0)$	$(1; 90^\circ; 90^\circ)$
D	$(0; 0; 0)$	$(0; 0; 0)$	$(0; 0; 0)$
E	$(1; 0; 1)$	$(\sqrt{2}; 45^\circ; 1)$	$(\sqrt{2}; 90^\circ; 45^\circ)$
F	$(0; 0; 1)$	$(0; 0; 1)$	$(1; 0; 0)$
G	$(0; 1; 1)$	$(\sqrt{2}; 45^\circ; 1)$	$(\sqrt{2}; 90^\circ; 90^\circ)$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$$

2.2 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, donner les coordonnées **sphériques** et **cylindriques** des points

A, B, C, D dont les coordonnées **cartésiennes** sont : A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 2 ; 2), C(-1 ; 5 ; 0) et D(0 ; 3 ; -1).

$$A \rightarrow \text{cylindriques} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1+0} = 1 \\ \theta = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = 0 \\ z = 2 \end{array} \right.$$

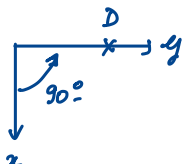
$$\text{Sphériques} : \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5} \\ \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26,6^\circ \\ \varphi = 0^\circ \end{array} \right.$$

$$B \text{ cylindriques} \left\{ \begin{array}{l} r = 2\sqrt{2} \\ \theta = 45^\circ \\ z = 2 \end{array} \right.$$

$$\text{Sphériques} \left\{ \begin{array}{l} r = 2\sqrt{3} \\ \theta = \arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = 54,7^\circ \\ \varphi = 45^\circ \end{array} \right.$$

$$C : \text{cylindriques} : \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{26} \\ \theta = \arctan\left(\frac{5}{-1}\right) + \frac{1}{2} \text{ tour} = 101^\circ \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Sphériques} : \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{26} \\ \theta = 90^\circ \\ \varphi = 101^\circ \end{array} \right.$$

$$D : \text{cylindriques} : \left\{ \begin{array}{l} r = 3 \\ \theta = 90^\circ \\ z = -1 \end{array} \right.$$


$$\text{Sphériques} : \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{10} \\ \theta = \arccos\left(-1/\sqrt{10}\right) = 108^\circ \\ \varphi = 90^\circ \end{array} \right.$$

2.3 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, calculer les coordonnées **cartésiennes** :

- (a) du point A dont les coordonnées **sphériques** sont : $r = 3$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$;
 (b) du point B dont les coordonnées **cylindriques** sont : $r = 2$, $\theta = 5\pi/4$, $z = 1$.

(a)

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

A:
$$\begin{aligned} x &= 3 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} \\ y &= 3 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ z &= 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

B:
$$\begin{aligned} x &= 2 \cos(5\pi/4) = 2(-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2} \\ y &= 2 \sin(5\pi/4) = 2(-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2} \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$A\left(\frac{9}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{2}\right)$$

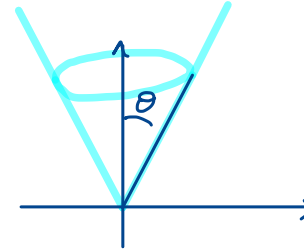
$$B(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 1)$$

2.4 En coordonnées **cylindriques**, l'ensemble des points tels que $r = \text{constante}$ est :

- (A) un cercle ; (B) un cylindre ; (C) ~~une sphère~~

2.5 En coordonnées **sphériques**, l'ensemble des points tels que $\theta = \text{constante}$ est :

- (A) un cercle passant par les pôles ; (B) un disque horizontal ; (C) un cône d'axe (Oz)



Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1 Géométrie dans le plan

1.1 On considère les points M et M' de coordonnées respectives $(1; \sqrt{3})$ et $(1; -\sqrt{3})$:

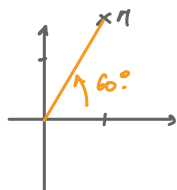
(a) déterminer leurs affixes z et z' sous forme algébrique.

(b) donner les expressions exponentielles de z et z' .

(c) Que constituent z et z' l'un pour l'autre ?

$$(a) \quad z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z' = 1 - i\sqrt{3}$$



$\times M'$

$$(b) \quad z = 1 + i\sqrt{3} \quad |z| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \cos \theta \quad \sin \theta$$

$$z' = 1 - i\sqrt{3} \quad |z'| = 2 \quad \arg(z') = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z = 2e^{i\pi/3} \quad z' = 2e^{-i\pi/3}$$

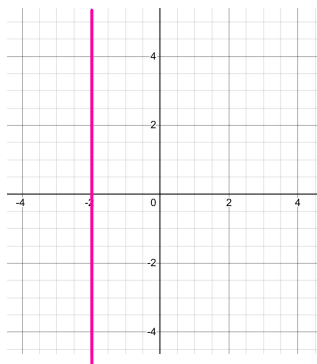
$$(c) \quad z' = \bar{z} \quad \text{conjugués}$$

M et M' sont symétriques par rapport à (Ox) .

1.2 Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des points d'affixes z telles que :

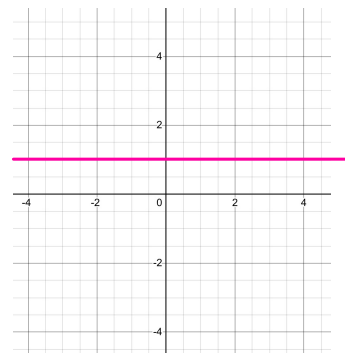
(a) $\operatorname{Re}(z) = -2$; (b) $\operatorname{Im}(z) = 1$; (c) $|z| = 4$; (d) $|z| = -3$; (e) $\arg(z) = \pi/4$;

(f) $z \cdot \bar{z} = 4$; (g) $z + \bar{z} = -4$; (h) $z - \bar{z} = 8i$; (i) $z = \bar{z}$.



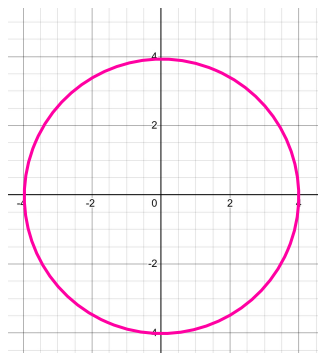
$$(a) \quad \operatorname{Re}(z) = -2$$

$$x = -2$$



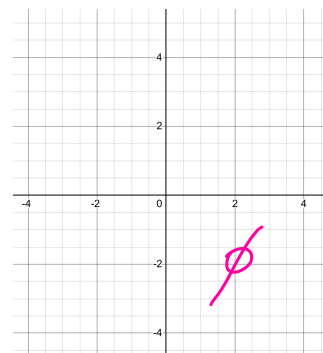
$$(b) \quad \operatorname{Im}(z) = 1$$

$$y = 1$$



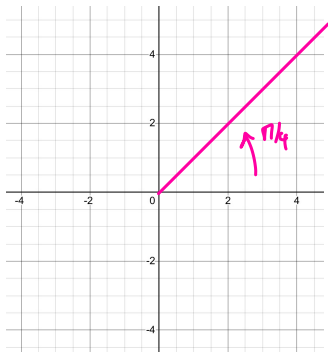
$$(c) \quad |z| = 4$$

$$r = 4$$



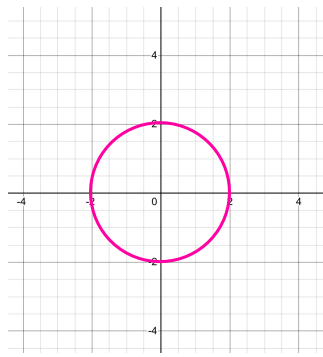
$$(d) \quad |z| = -3$$

$$r = -3$$



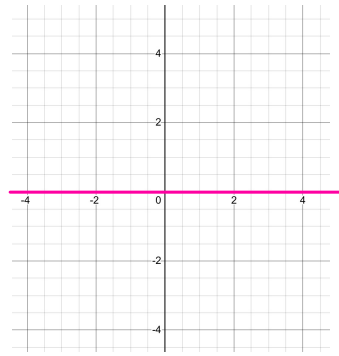
$$(e) \arg(z) = \pi/4$$

$$\theta = \pi/4$$



$$(f) z \cdot \bar{z} = 4 = r^2$$

$$r = 2$$

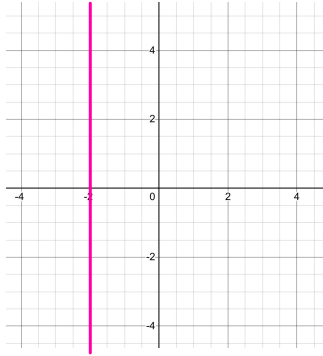


$$(i) z = \bar{z}$$

$$x + iy = x - iy$$

$$\begin{cases} x = x \leftarrow \text{toujours vraie} \\ y = -y \leftarrow \text{vraie si } y = 0. \end{cases}$$

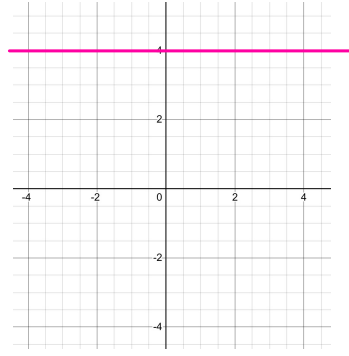
$$\Leftrightarrow y = 0.$$



$$(g) z + \bar{z} = -4 = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$= 2x$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$



$$(h) z - \bar{z} = 8i = 2i\operatorname{Im}(z)$$

$$y = 4$$

1.3 Déterminer graphiquement le module et l'argument des nombres suivants et donner leurs expressions exponentielles :

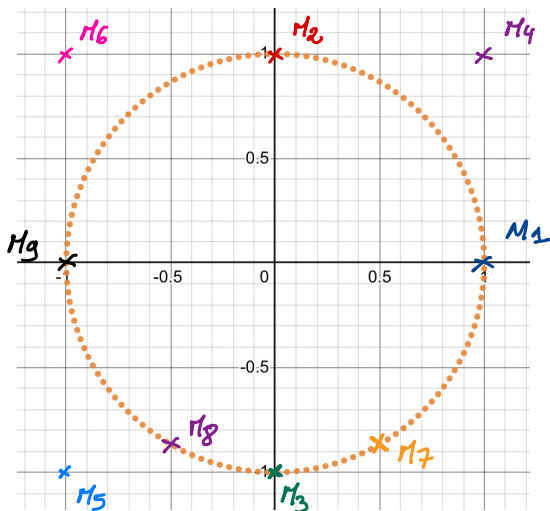
$$z_1 = 1; z_2 = i; z_3 = -i; z_4 = 1 + i; z_5 = -1 - i; z_6 = -1 + i;$$

$$z_7 = \frac{+1 - i\sqrt{3}}{2}; z_8 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; z_9 = -1$$

1.3 Déterminer graphiquement le module et l'argument des nombres suivants et donner leurs expressions exponentielles :

$$z_1 = 1; z_2 = i; z_3 = -i; z_4 = 1 + i; z_5 = -1 - i; z_6 = -1 + i;$$

$$z_7 = \frac{+1 - i\sqrt{3}}{2}; z_8 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; z_9 = -1$$



$$z_1 = 1e^{i0}$$

$$z_2 = 1e^{i\pi/2}$$

$$z_4 = 1 + i$$

$$z_6 = -1 + i$$

$$z_3 = 0 - 1i$$

$$M_3(0; -1)$$

$$z_4 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$z_6 = \sqrt{2} e^{-i3\pi/4}$$

$$z_3 = 1e^{-i\pi/2}$$

$$z_5 = -1 - i = \sqrt{2} e^{-i3\pi/4}$$

$$z_7 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arg(z_7) = -\pi/3$$

$$\Rightarrow z_7 = e^{-i\pi/3}$$

$$z_8 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z_8| = 1 \quad \arg(z_8) = -2\pi/3$$

$$\Rightarrow z_8 = e^{-i2\pi/3}$$

$$z_9 = -1$$

$$|z_9| = 1 \quad \arg(z_9) = \pi \quad z_9 = e^{i\pi}$$

1.4 Soient A, B et C les points d'affixes $z_A = 2 + 2i, z_B = -1 + 3i$, et $z_C = 4 + 6i$, et soient les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:

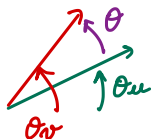
(a) calculer les affixes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$;

(b) à partir de ces affixes, calculer la valeur de l'angle $\theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.

$$(a) \quad z_u = z_B - z_A = -1 + 3i - (2 + 2i) = -3 + i$$

$$z_v = z_C - z_A = 4 + 6i - (2 + 2i) = 2 + 4i$$

(b)



$$\theta = \arg(z_v) - \arg(z_u)$$

$$\theta_u = \arg(z_u) = \arctan\left(\frac{1}{-3}\right) + 180^\circ = 162^\circ$$

$$\theta_v = \arg(z_v) = \arctan\left(\frac{4}{2}\right) = 63,4^\circ$$

$$\theta = \theta_v - \theta_u = -98,2^\circ$$

1.5 Soient A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 6i$.

(a) Donner l'affixe de $\vec{AC}$ sous forme exponentielle et déterminer la distance AC.

(b) Déterminer l'affixe z du point M tel que $3\vec{MB} - \vec{MA} = \vec{AC}$.

$$(a) \quad 3\vec{AC} = 3z_C - 3z_A = 2 + 6i \quad r = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{4}{2}\right) = 63,4^\circ$$

$$3\vec{AC} = 2\sqrt{5} e^{i63,4^\circ}$$

$$AC = r = 4,47 \text{ u.l.}$$

$$(b) \quad 3(z_B - z) - (z_A - z) = z_C - z_A$$

$$3z_B - \cancel{3z} - \cancel{z_A} + \cancel{z} = z_C - \cancel{z_A}$$

$$2z = 3z_B - z_C \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(3z_B - z_C) = \frac{1}{2}[3(1-2i) - (-1+6i)]$$

$$= \frac{1}{2}[4-12i] = \underline{2-6i}$$

$$\Rightarrow M(2; -6)$$

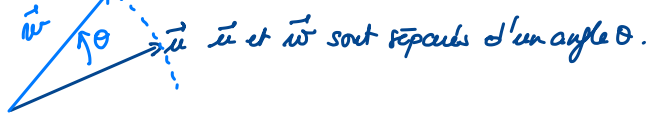
1.6 Soit $\vec{u}$ d'affixe z et $\vec{v}$ d'affixe iz :

(a) que dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

(b) Plus généralement, que dire de $\vec{u}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $e^{i\theta}z$?

$$(a) \quad \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$(b) \quad z_w = e^{i\theta} z$$



2 Techniques de calcul

2.1 Calculer les nombres complexes suivants, et exprimer les résultats obtenus sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2; \quad z_2 = \frac{1+3i}{1+2i}; \quad z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i)$$

$$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 = 1-4i-4 - (4+4i-1)$$

$$= -3-4i - (3+4i) = -6-8i$$

$$z_1 = re^{i\theta}$$

$$r = \sqrt{100} = 10$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-8}{-6}\right) = -180^\circ$$

$$= -127^\circ$$

$$\Rightarrow z_1 = 10 e^{-i127^\circ}$$

$$z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} = \frac{(1+3i)(1-2i)}{5} = \frac{1-2i+3i+6}{5} = \frac{7+i}{5}$$

$$\uparrow \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$z_2 = re^{i\theta}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1/5}{7/5}\right) + 0 = 8.13^\circ$$

$$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2} e^{i8.13^\circ}$$

$$z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i)$$

$$= 3i - 4 - [\cancel{3-i} - 9i - \cancel{3}] = -4 + 13i = z_3$$

$$r = \sqrt{185}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{13}{-4}\right) + 180^\circ = 107^\circ$$

$$\Rightarrow z_3 = \sqrt{185} e^{i107^\circ}$$

2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(1) $z^2 = -9$; (2) $z^2 + 3z + 4 = 0$; (3) $z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$

(4) $z + 2i = iz - 1$; (5) $2z + i = \bar{z} + 1$;

(6) $z^4 = 1$; (7) $z^3 = -1$; (8) $z^4 = -16$; (9) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$

(1) $z^2 = -9 \quad z_1 = 3i \quad z_2 = -3i \quad z = \pm 3i$

(2) $\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2 \quad z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2} \quad z_2 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2}$

$$z = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

(3) $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \quad \Delta = -4 = (2i)^2$

$$z = \frac{-2\sqrt{3} \pm 2i}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\sqrt{3} - i \\ z_2 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$$

(4) $z + 2i = iz - 1$

$$z - iz + 2i + 1 = 0 \Leftrightarrow z(1-i) + 2i + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2i-1}{1-i} = \frac{(-2i-1)(1+i)}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2i-1-i-1}{2} = \frac{-3i-2}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{3}{2} = z$$

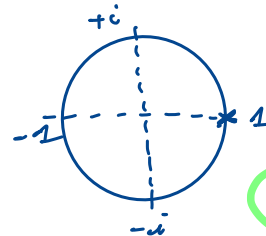
(5) $z_3 + i = \bar{z} + 1 \Leftrightarrow z_3 - \bar{z} = 1 - i$

pour $z = a + ib \Rightarrow \begin{cases} 2(a+ib) - (a-ib) = 1-i \\ a + 3ib = 1-i \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/3 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1 - \frac{1}{3}i$$

(6) $z^4 = 1$

$$z = 1$$



$$z_1 = 1$$

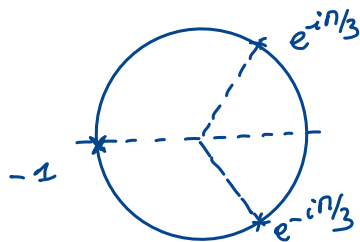
$$z_2 = -1$$

$$z_3 = i$$

$$z_4 = -i$$

$$(7) z^3 = -1$$

$z = -1$
3 solutions



$$z_1 = -1$$

$$z_2 = e^{-i\pi/3}$$

$$z_3 = e^{i\pi/3}$$

(6) $z^4 = 1$; (7) $z^3 = -1$; (8) $z^4 = -16$; (9) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$

$$(ze^{i\theta})^4 = 1e^{i0}$$

$$r^4 e^{i4\theta} = 1e^{i0}$$

$$\begin{cases} r^4 = 1 & r \geq 0 \\ \theta = \frac{0 + 2\pi k}{4} = 0 \left[\frac{\pi}{2} \right] \end{cases}$$

$$z_1 = 1e^{i0} = 1$$

$$z_2 = 1e^{i\pi/2} = i$$

$$z_3 = 1e^{i\pi} = -1$$

$$z_4 = 1e^{i3\pi/2} = -i$$

$$(ze^{i\theta})^3 = 1e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} r^3 = 1 & r \geq 0 \\ \theta = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right] \end{cases}$$

$$z_1 = 1e^{-i\pi/3}$$

$$z_2 = 1e^{i\pi} = -1$$

$$z_3 = 1e^{i5\pi/3} = 1e^{-i\pi/3}$$

$$z^4 = -16 \Leftrightarrow (re^{i\theta})^4 = 16e^{i\pi} \Leftrightarrow r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i\pi}$$

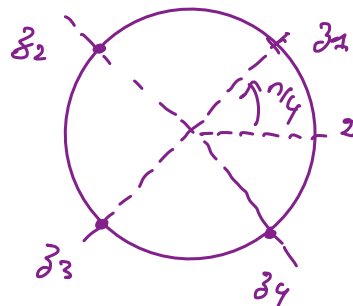
$$\Rightarrow \begin{cases} r^4 = 16 & r \geq 0 \\ 4\theta = \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \left[\frac{5\pi}{4} \right] \end{cases}$$

$$z_1 = 2e^{i\pi/4}$$

$$z_2 = 2e^{i3\pi/4}$$

$$z_3 = 2e^{i5\pi/4} = 2e^{-i3\pi/4}$$

$$z_4 = 2e^{i7\pi/4} = 2e^{-i\pi/4}$$



$$(10) z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$|2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{12 + 4} = 4$$

$$\arg(2\sqrt{3} - 2i) = \arctan\left(\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ$$

$$\Leftrightarrow z^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3 e^{i3\theta} \Leftrightarrow 4e^{-i\pi/6}$$

$$\begin{cases} r^3 = 4 & r \geq 0 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

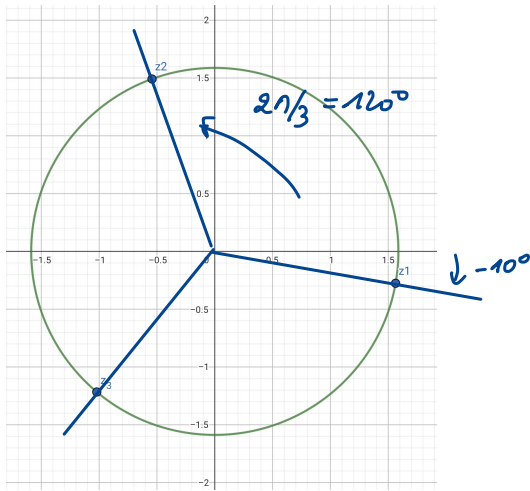
$$r = \sqrt[3]{4} = 1.59$$

$$\theta = -\frac{\pi}{18} \left[\frac{12\pi}{18} \right]$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4} e^{-i\pi/18}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4} e^{i11\pi/18}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{4} e^{i23\pi/18} = \sqrt[3]{4} e^{-i13\pi/18}$$



$$z_2 \neq \overline{z_3} \text{ car } 2\sqrt{3} - 2i \notin \mathbb{R}.$$

2.3 Calculer les nombres complexes suivants *en 3 minutes* 😊

$$(a) z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6; (b) z_2 = (5+3i)^7; (c) z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}; (d) z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}; (e) z_5 = \frac{4+6i}{1-5i}$$

$$z_1 = \left(1e^{-i\pi/3}\right)^6 = 1^6 e^{-i6\pi/3} = 1e^{-i2\pi} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Ex: } (1+i)^{32} &= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{32} = (\sqrt{2})^{32} e^{i\frac{32\pi}{4}} \\ &= 65536 e^{i8\pi} = 65536. \end{aligned}$$

$$(b) z_2 = (5+3i)^7$$

$$r = \sqrt{34}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 31,0^\circ$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\sqrt{34} e^{i31^\circ}\right)^7 = \sqrt{34}^7 e^{i217^\circ} = \sqrt{34}^7 e^{-i143^\circ} \\ &\approx 229000 e^{-i143^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) z_3 &= \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i \frac{\sqrt{3}+1}{4} \end{aligned}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}}{2 e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}]} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{12} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{cd) } z_4 &= \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3} = \frac{(\sqrt{2} e^{-i\pi/4})^2}{(2 e^{i\pi/6})^3} = \frac{2 e^{-i\pi/2}}{8 e^{i\pi/2}} \\
 &= \frac{1}{4} e^{i(-\pi/2 - \pi/2)} = \frac{1}{4} e^{-i\pi} = \underline{\underline{-\frac{1}{4} = z_4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ce) } z_5 &= \frac{4+6i}{1-5i} = \frac{(4+6i)(1+5i)}{26} = \frac{4+20i+6i-30}{26} \\
 &= \frac{-26+26i}{26} = -1+i
 \end{aligned}$$

3 Trigonométrie

3.1 À l'aide des formes exponentielles des nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 1 + i$, déterminer les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

↳ déjà fait

$$z = 2 e^{i\pi/6}$$

$$z' = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{12}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{12} &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \arg(z') - \arg(z) \\
 &= \arg\left(\frac{z'}{z}\right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{\sqrt{2} e^{i\pi/4}}{2 e^{i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/12}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi/12) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\pi/12)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3.2 À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

↳ cf cours "Formule de Moivre"
(Section 4.2.3)

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD)

1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $5A$; $8D$; $(1/2)B$; $3A - 2B$; $2A - 4B$; BC , BD , DB .

$$5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad 8D = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 16 & -8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \quad \quad 2 \times 3 \quad \quad 2 \times 3$

$$2A - 4B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \quad \quad 2 \times 3 \quad \quad 2 \times 3$

$$A - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ impossible}$$

$2 \times 3 \quad \quad 2 \times 1$

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} - \vec{v}$ impossible.

$$M \cdot N = \left(\begin{array}{c} \underbrace{\text{C colonnes}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} L \text{ lignes}$$

Il faut que $C = L$ pour que produit soit possible.

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

il manquait une ligne pour pouvoir faire ce calcul.

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2×2

$$BD \neq DB$$

Produit non-commutatif.

$$D \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3×3

2. Effectuer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1/2 & 1/5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -9 & -7 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1/2 & 1/5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 179 \\ 13 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^{-1} , la matrice inverse de A .

(b) Utiliser le résultat précédent pour résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -8 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$$

Exemple: $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} \text{ ou } \text{inv}(M)$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t_{\text{co}}(M)$$

$$\det(M) = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{j'inverse}$$

$$M^{-1} \text{ existe}$$

$${}^t_{\text{co}}(M) = \begin{pmatrix} +9 & -6 \\ -4 & +3 \end{pmatrix}$$

1. Damier
2. Je barre la ligne et la colonne de la case
3. Je calcule le déterminant de ce qu'il reste

Transposition: Je lis en ligne et j'écris en colonne

$${}^t_{\text{co}}(M) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^{-1} , la matrice inverse de A .

(b) Utiliser le résultat précédent pour résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y = -8 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$$

3. (a) $\det(A) = 1 \times 3 - (-2) \times 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe

$$\text{co}(A) = \begin{pmatrix} +3 & +2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$${}^t \text{co}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ -2x+3y \end{pmatrix}$

↑ ↑
ordre

$$(S_1) \quad AX = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad AX = B \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A^{-1}} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$$

$$I_2 = Id = Id_2 = 1I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$(S_1) \quad X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7/5 \\ y = 3/5 \end{cases}$$

$$(S_2) \quad X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$(S_3) \quad X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/5 \\ y = 3/5 \end{cases}$$

Déterminant 3x3

Exemple: $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\det(M) = +1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 25 + 2 \times 55 = 135$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 25 - 7(-18) + 4(-4) = 135.$$

4. (a) Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Ces matrices sont-elles inversibles ?

(c) Calculer B^{-1} la matrice inverse de B .

(a) $\det(A) = 18$

$\det(B) = -8$

(b) Oui.

(b') Calculons A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \Delta(A) = \begin{pmatrix} 3 & +3 \\ -1 & +5 \end{pmatrix} \quad {}^t\Delta(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(c) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Delta(B) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Delta(B) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 2 & -10 & -2 \end{pmatrix} \quad {}^t\Delta(B) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Inverser la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \times {}^t \text{co}(C)$$

$$\det(C) = 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0 = 7 \times 6 - 8 \times 2 = 26$$

$$\det(C) \neq 0 \Leftrightarrow C^{-1} \text{ existe}$$

$$\text{co}(C) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{co}(C) = \begin{pmatrix} -48 & +48 & 32 \\ +8 & -7 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t \text{co} = \begin{pmatrix} -48 & 8 & 6 \\ 42 & -7 & -2 \\ 32 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -48 & 8 & 6 \\ 42 & -7 & -2 \\ 32 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

6. À quelle(s) condition(s) la matrice $D(m) = \begin{pmatrix} m & 2 & 5 \\ 0 & 6 & m \\ m & 3 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

$$D^{-1} \text{ existe} \Leftrightarrow \det(D) \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \det(D) &= +6 \begin{vmatrix} m & 5 \\ m & 3 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} m & 2 \\ m & 3 \end{vmatrix} \\ &= 6(3m - 5m) - m(3m - 2m) \\ &= -12m - m^2 = -m(m+12) \end{aligned}$$

$$\det(D) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -12 \end{cases}$$

7 et 8 $\rightarrow$ après le 10.

9. Soit le système de paramètres m et n :
$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ 4y + mz = 2 \\ my + z = n \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) ce système n'admet-il aucune solution ?

$$\underline{\text{Ecr}}: \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow \text{infinité de solutions}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(M) = 0$$

$$M_x = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(M_x) = 0$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \det(M_y) = 0$$

9. Soit le système de paramètres m et n :

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ 4y + mz = 2 \\ my + z = n \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) ce système n'admet-il aucune solution ?

Ex:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow \text{infinité de solutions}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad M_x = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \quad M_y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = 0 \quad \det(M_x) = 0 \quad \det(M_y) = 0$$

$$y = -3x + 4$$

Ex:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad M_x = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad M_y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = 0 \quad \det(M_x) = 1 \neq 0 \quad \det(M_y) = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Aucune solution

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 4 & m \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix} \quad M_x = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 4 & m \\ n & m & 1 \end{pmatrix} \quad M_y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & m \\ 0 & n & 1 \end{pmatrix} \quad M_z = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & m & n \end{pmatrix}$$

Le système n'admet aucune solution si et seulement si

① $\det(M) = 0$ et $\begin{cases} \det(M_x) \neq 0 \\ \det(M_y) \neq 0 \\ \det(M_z) \neq 0 \end{cases}$

① $\det(M) = 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ \text{ou} \\ m = 2 \end{cases}$

② $\det(M_x) \neq 0 \quad \det(M_x) = 1 \begin{vmatrix} 4 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} 2 & m \\ n & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ n & m \end{vmatrix}$

$$= \cancel{4 - m^2} - m(2 - mn) + 1(2m - 4n)$$

$$= -2m + m^2n + 2m - 4n$$

$$= n(m^2 - 4) = 0$$

$\Rightarrow n = 0$

Aucune valeur de n ne permet d'avoir $\det(M_x) \neq 0$.

$\det(M_y) = 2 - mn \quad \det(M_y) \neq 0 \Leftrightarrow mn \neq 2$

$$\Leftrightarrow n \neq \frac{2}{m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 1 \\ \text{ou} \\ n \neq -1 \end{cases}$$

$\det(M_z) = 4n - 2m \neq 0 \Leftrightarrow 4n \neq 2m \Leftrightarrow n \neq \frac{m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 1 \\ \text{ou} \\ n \neq -1 \end{cases}$

9. Soit le système de paramètres m et n :

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ 4y + mz = 2 \\ my + z = n \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) ce système n'admet-il aucune solution ?

Le système n'admet aucune solution $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} m=2 \text{ et } n \neq 1 \\ \text{ou} \\ m=-2 \text{ et } n \neq -1 \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 4y + 2z &= 2 \\ 2y + z &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 4y - 2z &= 2 \\ -2y + z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 et A^3 .

(b) Calculer $P(A)$ où P est le polynôme $P(X) = 5X^2 + 6X + 3$.

8. On donne $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $X^t X$ et ${}^t X X$.

7.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2$$

$$A^3 = A A^2 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^3$$

(b) $P(A) = 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 16 & 21 \\ 0 & 14 & 16 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

8. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $X \cdot {}^t X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$

$${}^t X \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 14$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = {}^t \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 + 2 - 6 = -5$$

$\Rightarrow$ le produit matriciel (avec transposition) remplace le produit scalaire

10. On considère dans ce qui suit des transformations géométriques du plan. Donner :

- (a) la matrice R associée à une rotation de centre O et de rayon r , d'angle θ ;
- (b) la matrice H associée à une homothétie de centre O et de rapport k ;
- (c) la matrice S associée à une similitude de centre O , de rapport k et d'angle θ .
- (d) les matrices Σ_x et Σ_y associées respectivement aux symétries d'axe (Ox) et (Oy) .
- (e) la matrice P d'une projection orthogonale sur l'axe (Ox) . Calculer alors P^2, P^n et conclure.

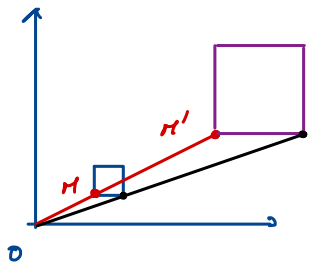
(a) $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \rightarrow$ *démo en cours.*

$M \xrightarrow{R(O;\theta)} M' \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\rightarrow \det(R) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
 $\rightarrow R^{-1}$ existe
 $\rightarrow$ la rotation multiplie les surfaces par 1

(b) $H(O;k) \quad k > 0$



$H = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k Id = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(H) = k^2 \neq 0$
 $\rightarrow H^{-1}$ existe
 $\rightarrow$ les surfaces transformées sont multipliées par k^2 .

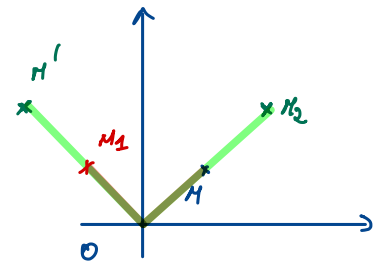
(c) $S: M \xrightarrow{R} M_2 \xrightarrow{H} M' \quad \bullet$
 $: M \xrightarrow{H} M_2 \xrightarrow{R} M' \quad \bullet$

$M' = H \cdot R \cdot M = (HR) M \quad \bullet$

$M' = R \cdot H \cdot M = (RH) M \quad \bullet$

$HR = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix}$

$RH = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix}$



$HR = RH$
 $\Rightarrow$ la permutation des deux transformations H et R donne la même transformation.

- (d) les matrices Σ_x et Σ_y associées respectivement aux symétries d'axe (Ox) et (Oy).
 (e) la matrice P d'une projection orthogonale sur l'axe (Ox). Calculer alors P^2 , P^n et conclure.

(d) Matrices ?

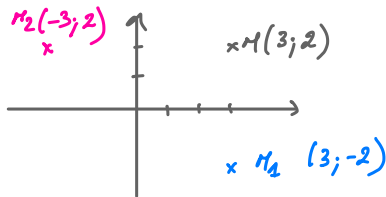
Transfo réversibles ?

Σ_x^{-1} et Σ_y^{-1} ?

Σ_x et R sont-elles permutable ?

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\det \Sigma_x = -1$$

$$\det \Sigma_y = -1$$

mêmes surfaces mais effet miroir

$$\Sigma_x^{-1} = \Sigma_x$$

$$\Sigma_y^{-1} = \Sigma_y$$

$$\Sigma_x R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R \Sigma_x = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_x R \neq R \Sigma_x$$

→ Transformations non permutable.

$$(e) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(P) = 0 \quad P^{-1} \text{ n'existe pas.}$$

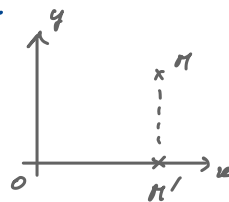
P n'est pas réversible.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P est un projecteur car $P^n = P$.

Projeter n fois donne la même chose que projeter une fois.



11. En utilisant les matrices :

- (a) déterminer A' , l'image du point $A(1;3)$ par la rotation de centre O et d'angle 30° suivie de la symétrie d'axe (Ox) ;
- (b) déterminer A'' , l'image du point $A(1;3)$ par la symétrie d'axe (Ox) suivie de la rotation de centre O et d'angle 30° ;
- (c) déterminer B' , l'image du point $B(2;1)$ par la similitude de centre O , de rapport 2 et d'angle 60° .

$$\begin{aligned} (a) \quad T &= \Sigma_x R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' &= T.A = \Sigma_x R.A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-3}{2} \\ -\frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,634 \\ -3,40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad T_2 A &= A'' \quad T_2 = R \Sigma_x = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+3}{2} \\ \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,37 \\ -2,40 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad B' = SB = 2R(0;60^\circ) \cdot B$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,268 \\ 4,46 \end{pmatrix}$$

12. On considère la transformation associée à la matrice $M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que M est associée à une projection.
- (b) Déterminer la droite sur laquelle la projection est faite.
- (c) En se rappelant que la droite d'équation $y = mx + p$ admet comme vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale.
- (d) La matrice M est-elle inversible? Cela vous paraît-il cohérent avec la transformation géométrique considérée?

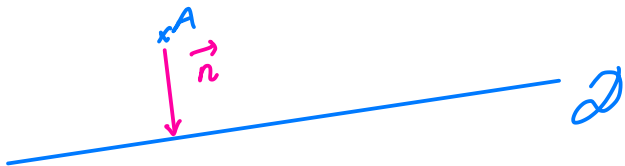
$$12. (a) \quad M^2 = M \quad \forall n$$

$$M^2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = M.$$

$\rightarrow M$ est associée à une projection.

(b) Soit $A \in D$ droite de projection $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



(b) Soit $A \in D$ droite de projection $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$M \cdot A = A$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}(x + 2y) = x \\ \frac{1}{5}(2x + 4y) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}(2x + 4y) = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0: y = 2x$$

(c) $\vec{n}$ vecteur de projection

$$\Leftrightarrow M\vec{n} = \vec{0}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M\vec{n} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \vec{n}$ est vecteur de projection

$\vec{n} \perp D \Leftrightarrow M$ décrit une projection orthogonale sur $D: y = 2x$

(d) $\det(M) = 0 \Leftrightarrow M^{-1}$ n'existe pas.

Cohérent avec la non-réversibilité de la projection.

Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1 Ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1) f(x) = \frac{1}{x-1} & 2) f(x) = \frac{1}{x^2-4} & 3) f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6} & 4) f(x) = \sqrt{x^2+3x-4} \\
 5) f(x) = \frac{1}{\cos x - \sin(2x)} & 6) f(x) = \ln(1-x) & 7) f(x) = \ln(2x^2+3x-2) & 8) f(x) = \frac{\sin(x)}{x}
 \end{array}$$

$$1) f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$2) \mathcal{D}_f = \{x / x^2-4 \neq 0\}$$

$$x^2-4=0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$=]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$3) f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+x-6 \neq 0\}$$

$$\Delta = 25 = 5^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$$

NB: $\sqrt{x}$ définie $\forall x \geq 0$

$\ln(x)$ définie $\forall x > 0$

$$4) f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+3x-4 \geq 0\}$$

$P(x) = ax^2+bx+c$ est du signe de a
à l'extérieur des racines.

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 = 5^2$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4 \quad x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$$

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\cos(x) - \sin(2x)}$$

$$\mathcal{D}_f = \{x / \cos(x) - \sin(2x) \neq 0\}$$

$$\cos(x) - \sin(2x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \sin(2x) \longrightarrow \text{T D 1}$$

$$S = \left\{ x = \frac{n}{6} \left[\frac{2n}{3} \right] \right\} \cup \left\{ x = \frac{n}{2} [2n] \right\}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{n}{6} \left[\frac{2n}{3} \right]; \frac{n}{2} [2n] \right\}$$

$$6) f(x) = \ln(1-x)$$

$$\mathcal{D}_f = \{x / 1-x > 0\}$$

$$1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow \mathcal{D}_f =]-\infty; 1[$$

$$7) f(x) = \ln(2x^2 + 3x - 2)$$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 3x - 2 > 0\}$$

$$\Delta = 25 = 5^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \\ x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$8) f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

⚠ Quand il y a un trou dans $\mathcal{D}_f$, je fais une étude de branche infinie (asymptotique)

2 Parité et symétries

2.1 Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = |x|$

2) $f(x) = x^2$

3) $f(x) = x^3$

4) $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = x^{3/2}$

6) $f(x) = 2x + 1$

7) $f(x) = 2x^2 + 1$

8) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

9) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

10) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$

11) $f(x) = \sin(2x)$

12) $f(x) = \sin(x^2)$

13) $f(x) = \cos(3x)$

14) $f(x) = \cos(x^3)$

15) $f(x) = \tan(x)$

16) $f(x) = \tan(x^2 + 1)$

17) $f(x) = \ln(x)$

18) $f(x) = \sin \circ \ln(x)$

19) $f(x) = \ln \circ \sin(x)$

20) $f(x) = \exp(x)$

21) $f(x) = \sin \circ \exp(x)$

22) $f(x) = \exp \circ \cos(x)$

□ paires

○ impaires

✗ ni paires ni impaires.

1) $f(-x) = |x|$

2) x^2 est pair car 2 est pair.

4) $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$ et $\sqrt{x} = x^{1/2}$

5) $x^{3/2} = x \cdot x^{1/2} = x\sqrt{x}$

7) pair + pair $\rightarrow$ pair

8) $\frac{I}{P+P} \rightarrow I$

10) $2x + 1 \rightarrow P+I$

12) $f(-x) = \sin((-x)^2) = \sin(x^2) = f(x)$

