CHAPITRE 1 : CALCULS NUMERIQUES

FRACTIONS :

$$\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$$
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

DEVELOPPEMENTS :

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

PUISSANCES :

$$a\neq 0,\quad a^0=1,\quad a^n=a\times a\times a\ldots\times a$$
$$a^n\times a^p=a^{n+p}$$
$$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$$
$$\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$$
$$(a^n)^p=a^{np}$$
$$(ab)^n=a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$
$$(-a)^n=+a^n \text{ si } n \text{ pair}$$
$$-a^n \text{ si } n \text{ impair}$$

RACINES CARREES :

a et b positifs

$$\sqrt{a}=b\Leftrightarrow a=b^2$$
$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
$$(\sqrt{a})^2=a \quad ; \quad \sqrt{a^2}=a$$
$$x^2=a\Leftrightarrow x=\sqrt{a} \text{ ou } x=-\sqrt{a}$$

TABLEAUX DE CONVERSION

Unités de longueur :

Kilomètre (km)	Hectomètre (hm)	Décamètre (dam)	Mètre (m)	Décimètre (dm)	Centimètre (cm)	Millimètre (mm)

1 km = ………… m

1 m = ………… cm

1 µm (micromètre) = 0,001 mm

1 (nm) nanomètre = 0,000 000 001 m

Unités de masse :

Tonne (T)	Quintal (q)		Kilogramme (kg)	Hectogramme (hg)	Décagramme (dag)	Gramme (g)	Décigramme (dg)	Centigramme (cg)	Milligramme (mg)

1 T = .1000.. kg

1 kg = ..1000.. g

Unités d'aires :

Kilomètre carré (km^2)		Hectomètre carré (hm^2)		Décamètre carré (dam^2)		Mètre carré (m^2)		Décimètre carré (dm^2)		Centimètre carré (cm^2)		Millimètre carré (mm^2)	
			ha		a		ca						

ha = hectare a = are ca = centiare

1 ha = 10 000 m^2
= 0,01 km^2

1 a = 100 m^2

1 ca = 1 m^2

Unités de volumes et capacité :

Kilomètre cube (km^3)			Hectomètre cube (hm^3)			Décamètre cube (dam^3)			Mètre cube (m^3)			Décimètre cube (dm^3)			Centimètre cube (cm^3)			Millimètre cube (mm^3)		
												hL	daL	L	dL	cL	mL			

hL = hectolitre ; daL = décalitre ; L = litre ; dL = décilitre ; cL = centilitre ; mL = millilitre

1 giga= 10^9 ; **1 mega=** 10^6

EXERCICE 1 : Donner le résultat sous forme de fraction irréductible sans utiliser la calculatrice puis vérifier le résultat obtenu avec la calculatrice :

$A=\frac{18}{10}$; $B=\frac{15}{25}$; $C=\frac{24}{36}$; $D=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$; $E=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$; $F=1-\frac{4}{10}$; $G=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}$

$H=\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}$; $I=\frac{-6}{7}\times\frac{14}{15}$; $J=\frac{1}{15}-\frac{2}{21}$; $K=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; $L=\frac{2}{a}-\frac{1}{2a}$; $M=aw-\frac{1}{bw}$

$N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$; $O=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}}$; $P=\frac{6(n^2-1)}{25}\times\frac{15}{2(n+1)}$; $Q=\frac{21(n+2)^2}{4}\times\frac{8}{14(n^2-4)}$

EXERCICE 2 :

Simplifier en utilisant les règles sur les puissances

$A=3^{-2}\times3^3$; $B=a\times a^2$; $C=2a\times a-a^2$; $D=\frac{x^4}{x^2}$; $E=\frac{6^3}{18}$; $F=\left(\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $G=\frac{(5^2\times3)^3}{5^4\times3^2}$

$H=\frac{(3a^2)^3}{3a\times(9a^2)^2}$; $I=\frac{24(a^2b)^3}{(2a)^2}\times\frac{2(ab)^2}{(3ab^2)^3}$

EXERCICE 3 :

Simplifier

$A=2\sqrt{20}-\sqrt{45}$; $B=7\sqrt{3}-3\sqrt{27}+5\sqrt{12}$; $C=\sqrt{8}\times\sqrt{2}-2\sqrt{75}+5\sqrt{12}$; $D=2\sqrt{27}+3\sqrt{3}-4\sqrt{12}$; $E=2\sqrt{5}\times\sqrt{15}$

EXERCICE 4 :

Développer, réduire et ordonner :

$A=a(2a-1)$; $B=(a+1)(2a-3)$; $C=(3x-1)(2x+3)$; $D=(2x+1)^2$; $E=(3x-2)^2$; $F=(1-2x)^2$

$G=(x+1)^2+(4x-1)(x+1)$; $H=(R-2)(R+2)-(3R-1)^2$; $I=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$; $J=(1-3\sqrt{2})^2+(1+3\sqrt{2})^2$

EXERCICE 5 :

Mettre sur le même dénominateur et simplifier :

$A=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$; $B=\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x+3}$; $C=2x-1-\frac{3}{2x+1}$; $D=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2-1}$

$E=\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}+\frac{x-1}{4x^2-1}$; $F=2+\frac{1}{x+2}-\frac{x}{(x+2)^2}$

EXERCICE 6 :

Factoriser

$A=ax+bx$; $B=ab^2+2cb$; $C=2r^2-r$; $D=(3x+1)(x-1)+(3x+1)(2x+3)$

$E=(x-2)(3x+5)-(x-2)(1-2x)$; $F=(x+1)(x+2)-(x+1)(2x-3)$; $G=(x-2)(1-2x)+(4x-8)(5-x)$

$H=x(1-3x)-x$; $I=(4x-7)(2x+1)+16x^2-49$

EXERCICE 7 :

Résoudre

1) $2x-1=5$; 2) $3x-1=1-x$; 3) $2-2x=x-4$; 4) $3(x+1)-x=1-(x-4)$; 5) $\frac{x}{3}-2(x+\frac{1}{3})=1-(x-4)$

6) $x^2-4=0$; 7) $25x^2-9=0$; 8) $3x-4<5x-1$; 9) $x+\frac{3}{2}\geq3+2x$; 10) $2(\frac{1}{4}x+1)>\frac{-6}{5}(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}x)$

EXERCICE 8 :

1) $a=bc+d$ isoler d ; 2) $a=bc+d$ isoler c ; 3) $I=\frac{U}{R}$ isoler R ; 4) $\frac{A}{B}=\frac{5}{C}$ isoler B

5) (Résistance) $R=\frac{\rho I}{s}$ isoler I ; 6) $\frac{m}{2a}=\frac{5}{3}$ isoler a ; 7) (Aire trapèze) $A=\frac{h(B+b)}{2}$ isoler h, isoler b

8) $I=\frac{m}{t^2}$ isoler t ; 9) $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{g}}$ isoler I ; 10) $a=\frac{1}{2}bc^2-d$ isoler c

11) (Flèche) $f=\frac{Fa}{24EI}(3L^2-3a^2)$ isoler L ; 12) (Thermique) $U_p=U_c+\frac{\Phi L+X}{A}$ isoler L

13) (Surface collectée) $S=\left(\frac{I_1}{2}+\frac{I_2}{2}\right)L$ isoler I_2 ; 14) (Resistance équivalente) $\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ isoler R_{eq}

15) (Resistance équivalente) $\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ isoler R_2 ; 16) (Capteur) $V_S=\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)V_I$ isoler R_1

EXERCICE 9 :

1) Sur un plan dessiné à l'échelle 1/1500, la distance entre deux arbres est 16 cm. Quelle est la distance en mètres entre ces deux arbres dans la réalité ?

2) La hauteur d'un bâtiment est de 24 cm sur un plan à l'échelle 1/50. Donner la hauteur en mètres du bâtiment dans la réalité.

3) la longueur d'un terrain est 563 m. Donner la longueur sur un plan à l'échelle 1/2000?

4) La distance entre New York et Los Angeles est 3950 km. Quelle est la distance sur une carte 1/10 000 000 ?

5) Dans la réalité, un terrain mesure 425 m. Il est représenté sur un plan par une longueur de 28,33 cm. Déterminer l'échelle.

6) Une voiture consomme 6 litres d'essence pour 100 km. Combien de kilomètres peut-on parcourir avec un réservoir plein dont les dimensions en centimètres sont $20\times30\times70$?

7) On creuse un trou (pavé droit) à base rectangulaire $5{,}5\,m$ par $3{,}3\,m$. Le volume du trou est $11{,}8\,m^3$. Calculer la profondeur du trou en centimètres.

8) Il faut vider un chauffe-eau en forme de cylindre horizontal (de diamètre $60\,\text{cm}$) qui occupe un espace de $60\,\text{cm}\times60\,\text{cm}\times1\,\text{m}$. Si le chauffe-eau a été vidé en 1,5 heure, quel est le débit du tuyau d'évacuation en L.min^{-1} ?

9) Une voiture roulant à vitesse constante, a parcouru 105 km en 1 heure 15 minutes. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 189 km ?

10) Un train qui roule d'un mouvement uniforme à la vitesse de 80 km par heure défile en 12 s devant un passage à niveau. Calculer la longueur du train.

CHAPITRE 2 : POURCENTAGES, TAUX DE CROISSANCE

Exemple : Une somme de 1000 euros subit une hausse de 20%. Quel est le montant de la hausse ? Quel est le nouveau montant ?

I) Formules

proportion de l'ensemble A dans l'ensemble E : $p=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$; pourcentage $t=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}\times 100=p\times 100$

augmentation de t % : $\times\left(1+\frac{t}{100}\right)$

baisse de t % : $\times\left(1-\frac{t}{100}\right)$

taux de croissance : $\frac{V_{finale}-V_{initiale}}{V_{initiale}}\times 100$

Exercices

1) Dans une classe de 32 élèves, il y a 12 filles. Calculer le pourcentage de filles dans la classe.
2) Calculer le pourcentage d'une réduction de 7 euros sur un prix de 40 euros .
3) Un voyagiste propose une réduction de 20 % sur un voyage de 860 euros. Calculer le montant de l'économie réalisée.
4) Dans une entreprise, 98 commerciaux représentent 35 % des salariés, calculer le nombre de salariés.
5) Promotions :
   a) 50 % sur le deuxième produit.
   b) le troisième produit gratuit.
   Quelle est la plus avantageuse ?
6) La valeur de l'action de France télécom passe de 150 euros à 25 euros entre 1999 et 2002 . De combien a-t-elle baissé ?
7) Pendant les soldes, un magasin donne une remise de 30%. Le prix non-soldé d'une veste est de 70 euros. Quel est le prix soldé ? Le prix soldé d'une chemise est de 21 euros. Quel est le prix non-soldé ?
8) Sous l'effet de la chaleur, une lame de parquet de 1,80 m de long s'allonge de 0,5 %. Calculer sa nouvelle longueur.
9) La population d'une ville augmente de 8 % pour atteindre 48600 habitants. Calculer la population avant l'augmentation.
10) Calculer le taux d'évolution équivalent à deux hausses successives de 20 %.
11) Calculer le taux d'évolution équivalent à une hausse de 50 % suivie d'une baisse de 30 %.
12) Un salarié est rémunéré 15 euros de l'heure en juin 2014. Son patron lui accorde une augmentation de 10% en juillet. A la rentrée, pour faire face à la crise, le patron est obligé de diminuer le salaire horaire de 10%. Quel est le nouveau salaire horaire ?
13) Un prix de 15 euros subit successivement une hausse de 10% puis une hausse 20%. Quel est le nouveaux prix ? Quel est le taux de croissance entre le prix initial et le prix final ?
14) Le gérant d'une parfumerie analyse l'évolution de sa recette totale. La vente de parfums a augmenté de 50% et leur prix de vente a augmenté de 10%. Quel est le taux de croissance de la recette totale ?
15) Les Français augmentent de 60% leur budget pour la cosmétique mais le prix des cosmétiques augmente de 20%. De combien augmente la quantité de cosmétiques achetés ?
16) Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60% ?

II) Taux de croissance global et annuel moyen

Exemple :

Un prix passe de 45 euros à 80 euros en 3 ans. Quel est le taux de croissance sur la période de 3 ans ? Quel est le taux de croissance annuel moyen ?

Exercices 1 :

Deux produits A et B coûtent 10 euros en 2010. Entre 2010 et 2015, le produit A a augmenté de 25% et le produit B a augmenté de 5% chaque année.

1) Quel est le taux de croissance annuel moyen pour le produit A ?
   Quel est le taux de croissance global pour le produit B ?
2) Quel est le prix en 2015 de ces deux produits ?

Exercice 2 :

Un client place une somme de 1500 euros en 2010 sur un livret A à 1,5% par an à intérêts composés.

1) Quel est le montant en 2011? 2012 ? 2050 ?
2) Calculer le taux d'accroissement global entre 2010 et 2050 .
3) Si le montant passe de 1500 euros à 1600 euros en 2015, quel est le taux annuel ?

Exercice 3 :

En Inde, le taux d’inflation annuel est de 5 % contre 2 % en Chine. Comparer les taux globaux d’inflation sur 10 ans.

CHAPITRE 3 : RAPPELS GEOMETRIE

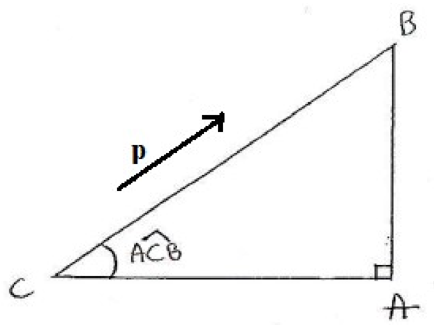
1) Théorème de Pythagore

Si le triangle ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproque :

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A .

2) Trigonométrie dans le triangle rectangle



Si ABC est un triangle rectangle en A alors :

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{CA}{CB}$$

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{BA}{CB}$$

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BA}{CA}$$

Pente $\alpha = \widehat{ACB}$ angle de la pente

$$\text{pente} = \frac{AB}{AC} \quad ; \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{AC} \quad ; \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}\right) = \arctan\left(\frac{AB}{AC}\right)$$

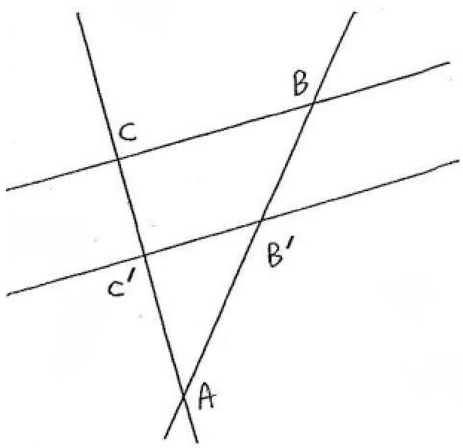
3) Théorème de Thalès

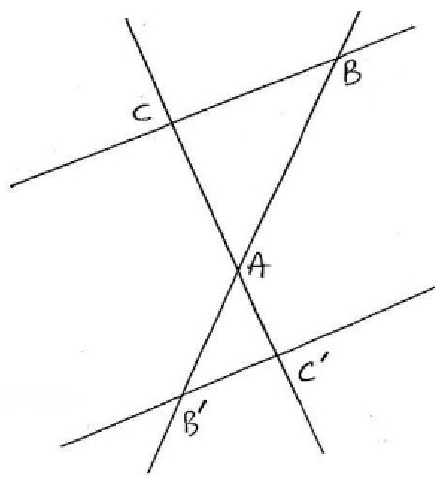
Si les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles alors $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

Réciproque :

Si $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ alors les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.

(De même si $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ ou si $\frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$)

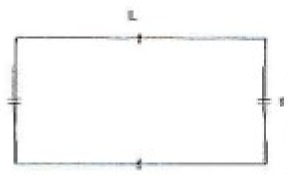




4) La somme des angles d'un triangle vaut 180° .

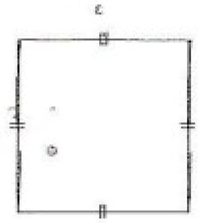
5) Aires

RECTANGLE



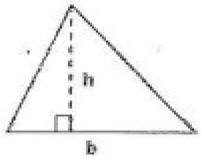
$A = L \times l$

CARRE



$A = c^2$

TRIANGLE

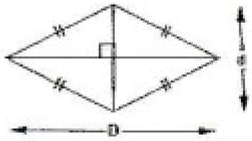


$A = \dfrac{b \times h}{2}$

TRIANGLE RECTANGLE

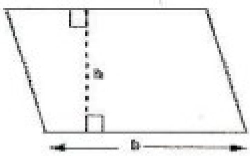
$A = \dfrac{a \times b}{2}$

LOSANGE



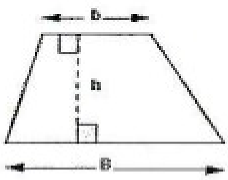
$A = \dfrac{D \times d}{2}$

PARALLELOGRAMME



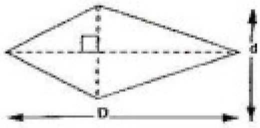
$A = b \times h$

TRAPEZE



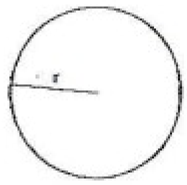
$A = \dfrac{(B + b) \times h}{2}$

CERF-VOLANT



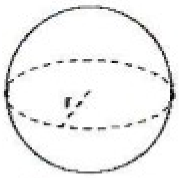
$A = \dfrac{D \times d}{2}$

DISQUE

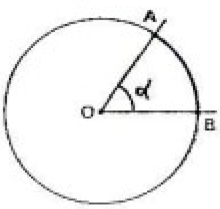


$A = \pi r^2$

SPHERE



$A = 4 \pi r^2$



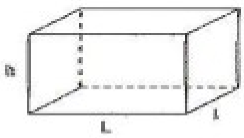
Longueur arc de cercle : $\widehat{AB} = 2\pi R \dfrac{\alpha}{360}$ (α en degrés)

Aire du secteur angulaire : $\pi R^2 \dfrac{\alpha}{360}$ (α en degrés)

6) Volumes

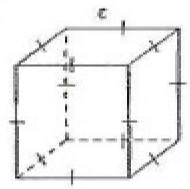
VOLUME = AIRE DE LA BASE × HAUTEUR

PAVE DROIT



$V = L \times l \times h$

CUBE

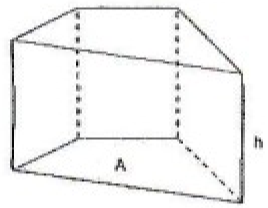


$V = c^3$

CYLINDRE

$V = \pi r^2 \times h$

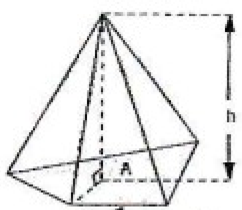
PRISME DROIT



$V = A \times h$

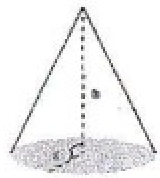
VOLUME = $\frac{1}{3}$ × AIRE DE LA BASE × HAUTEUR

PYRAMIDE



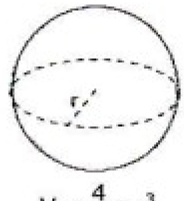
$V = \frac{1}{3} \times A \times h$

CONE



$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$

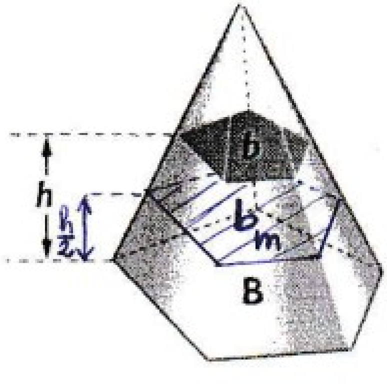
BOULE



$V = \frac{4}{3} \times r^3$

VOLUME PYRAMIDE TRONQUEE A BASE PARALLELE $V = \frac{h}{6}(B + b + 4\,b_m)$

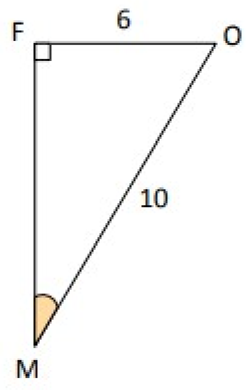
B, b bases, b_m base du milieu, h hauteur



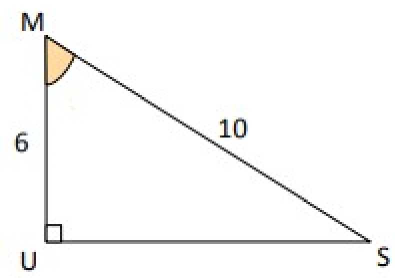
EXERCICE 1

Pour chacun des triangles ci-dessous, calculer les trois angles et les trois côtés.

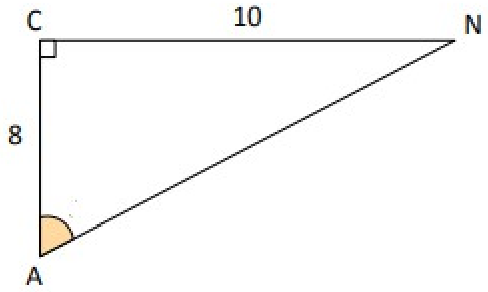
1)



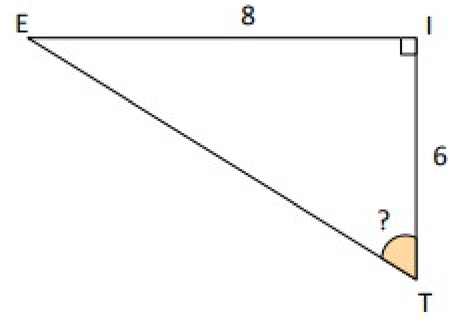
2)



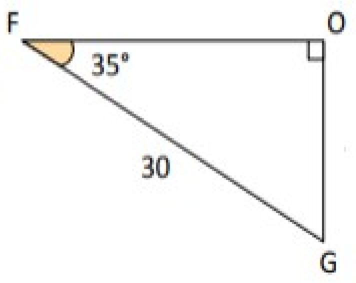
3)



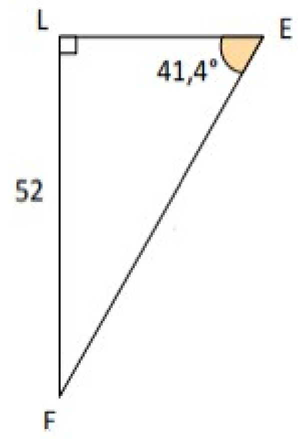
4)



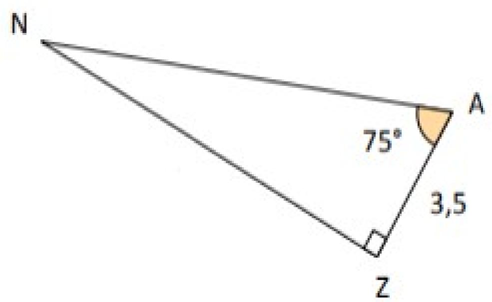
5)



6)



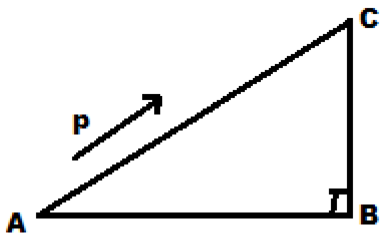
7)



EXERCICE 2

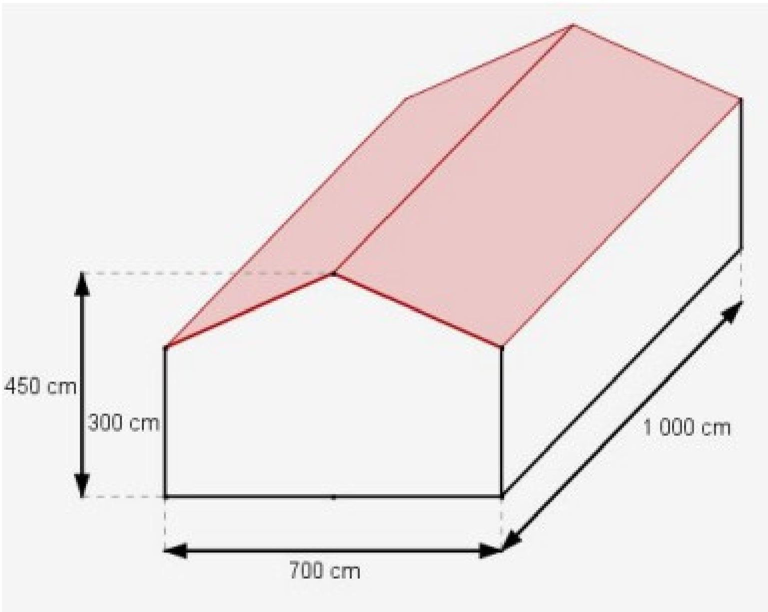
Calculer l'angle de la pente en degrés, la pente en pourcentage, la hauteur BC, la longueur AB et la longueur du rampant AC.

1) AB= 4m et BC= 2m
2) AB= 3m et BC= 1,4m
3) $\alpha = 25°$ et AB= 4m
4) $\alpha = 20°$ et BC= 2m
5) $p = 70\%$ et AB= 5m
6) $p = 17\%$ et BC= 3,2m



EXERCICE 3

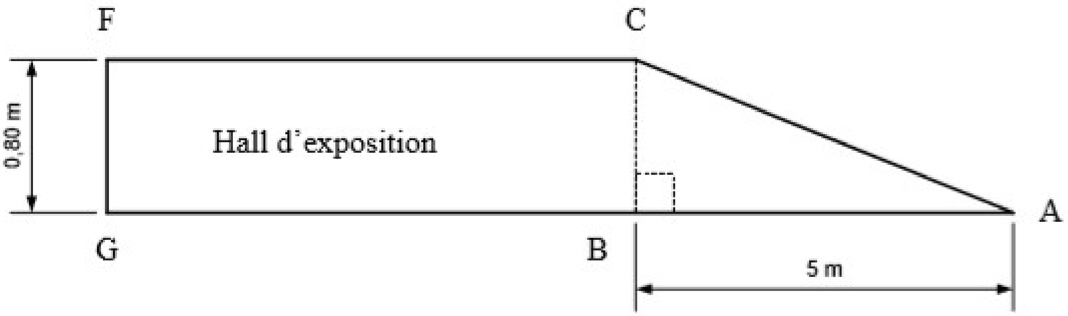
On considère la maison ci-dessous :



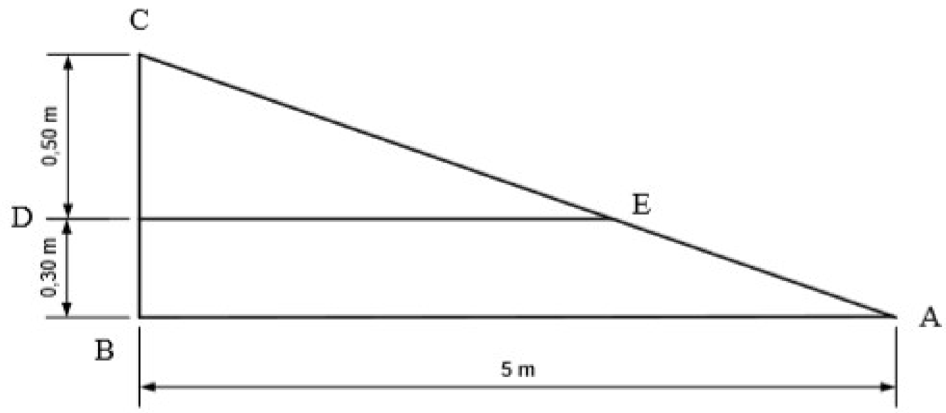
1) Calculer la surface du toit et l'angle du toit ainsi que la pente du toit en pourcentage.
2) Calculer la surface totale de la façade.
3) Calculer le volume de la maison.

EXERCICE 4

Un concessionnaire automobile aménage son hall d'exposition. Pour accéder au bâtiment, on a besoin de fabriquer une rampe de forme triangulaire correspondant au schéma suivant : (Les proportions ne sont pas respectées) .



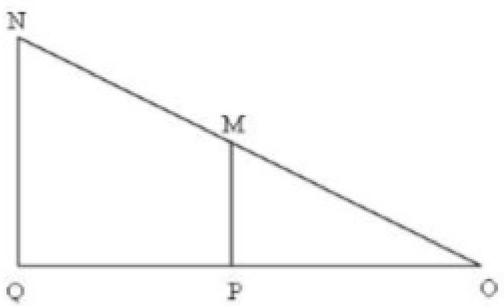
Pour fabriquer la rampe, on désire la réaliser en deux parties comme le montre le schéma ci-contre. (Les proportions ne sont pas respectées)

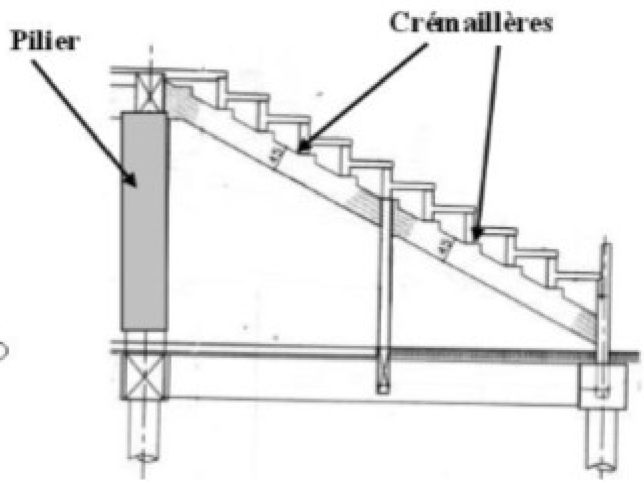


1) Calculer AC.
2) Calculer DE et CE.
3) Calculer l'angle $\widehat{BAC}$ ainsi que la pente de la rampe en pourcentage.

EXERCICE 5

Les crémaillères qui supportent les gradins d'un stade sont fixées pour former une rangée comme le montre la figure ci-dessous :



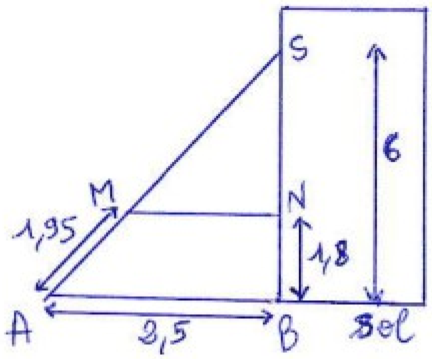


On donne OP =314 cm, MP =226 cm et OQ =630 cm.

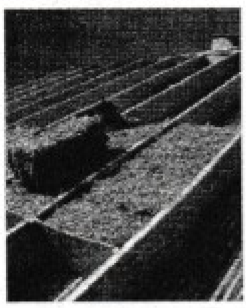
1) Calculer OM .
2) Calculer QN et ON.
3) Calculer l'angle $\widehat{QON}$ et la pente du gradin en pourcentage.

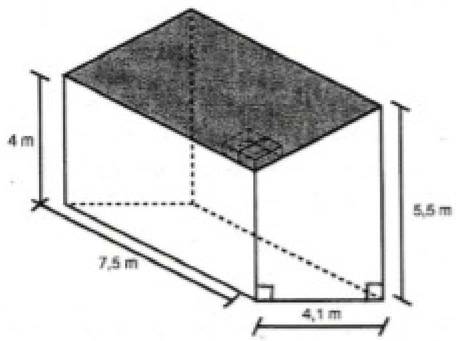
EXERCICE 6

Pour consolider un bâtiment, des charpentiers ont construit un contrefort en bois.
1) En considèrent que le montant [BS] est perpendiculaire au sol, calculer la longueur AS.
2) Calculer les longueurs SM et SN.
3) Démontrer que la traverse [MN] est bien parallèle au sol.



EXERCICE 7
On désire réaliser l'isolation d'une toiture avec des bottes de paille parallélépipédiques. Le bâtiment est un prisme droit dont les dimensions sont données sur le schéma ci-dessous.
La partie à isoler sur une épaisseur de 40 cm est représentée par la surface grisée. On considère que les bottes sont disposées les unes contre les autres, sans tenir compte de l'épaisseur des éléments de la structure entre lesquelles elles sont insérées. Les bottes sont produites par un agriculteur avec les dimensions suivantes :
110cm x 50cm x 40cm. Le prix de la paille est évalué à 40 euros par tonne. De plus, on estime qu'un m^3 de paille représente une masse de 80 kg.





1) Calculer la surface de la face avant sur le schéma et le volume du bâtiment.
2) Calculer la surface du toit.
3) Déterminer le prix d'une botte.
4) Déterminer le nombre de bottes à commander et le coût total.

EXERCICE 8

La figure n°1 montre un auvent trois pans pour porte d'entrée.
Le but de l'exercice est de déterminer certaines cotes.

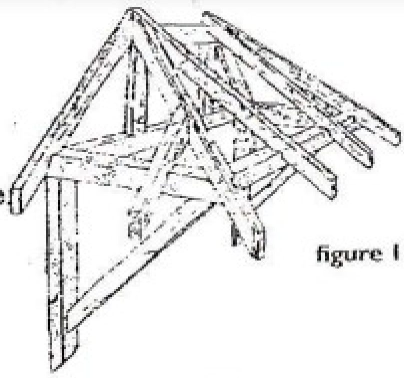


figure 1

La figure 2 est une projection de la partie arrière de l'auvent.
L'axe Δ est un axe de symétrie (il partage la figure en 2 parties identiques).

1) Calculer la longueur *AB*.
2) Donner la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$.
3) Dans le triangle ABC, calculer les longueurs *BC* et *AC*.

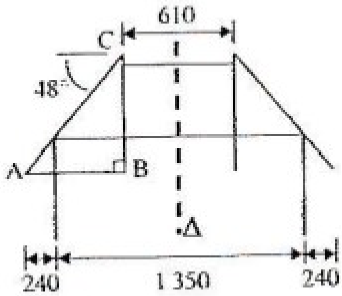
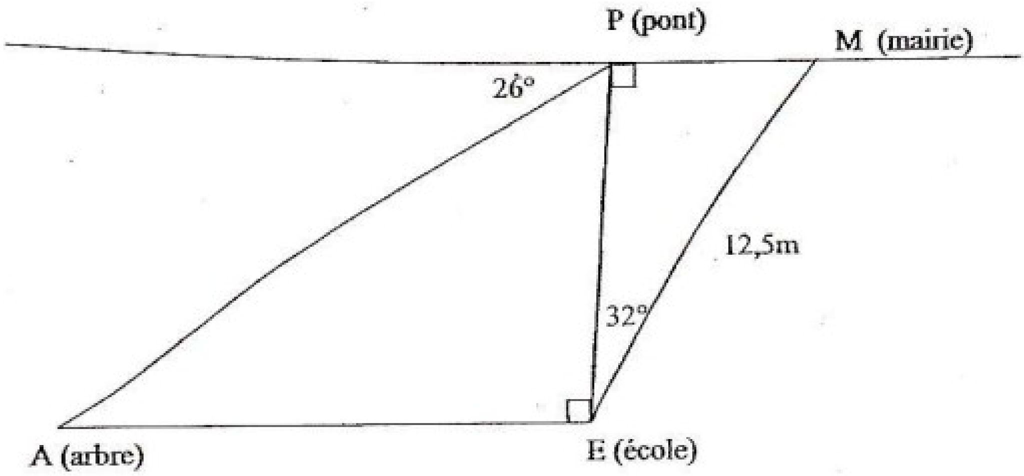


figure 2

EXERCICE 9

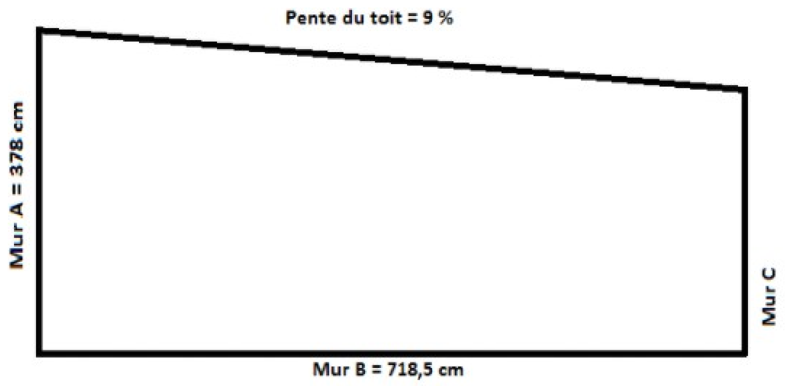
Un topographe revient du terrain d'un lotissement avec des informations dessinées sur le croquis ci-dessous.



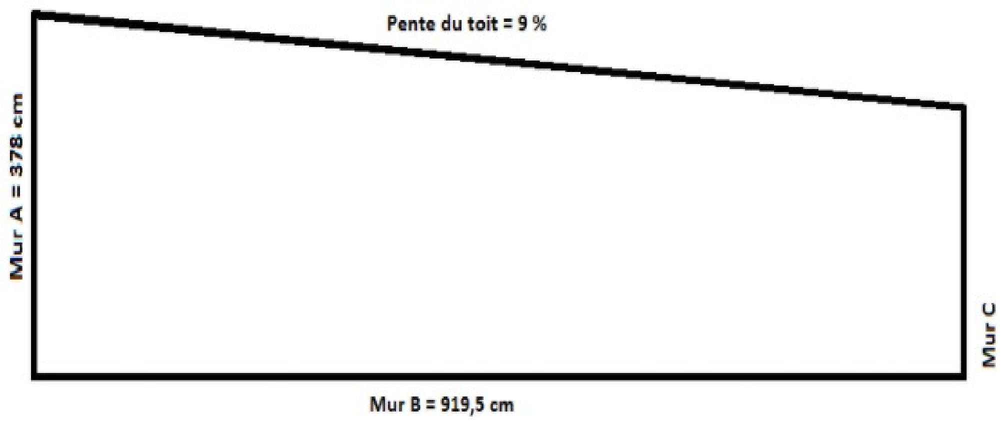
1) Calculer les dimensions inconnues des côtés du triangle MPE.
2) Calculer tous les angles inconnus du triangle PEA.
3) Calculer les dimensions inconnues dans le triangle PEA.
4) Construire à l'échelle 1 cm pour 2 m, la figure en respectant toutes les dimensions trouvées.

EXERCICE 10 : Calculer la longueur du mur C.

1)

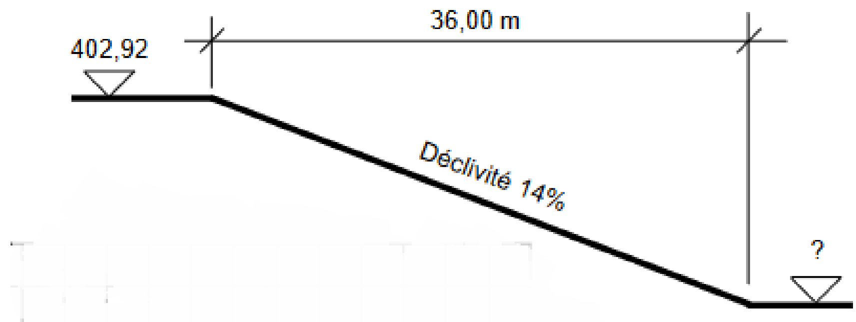


2)

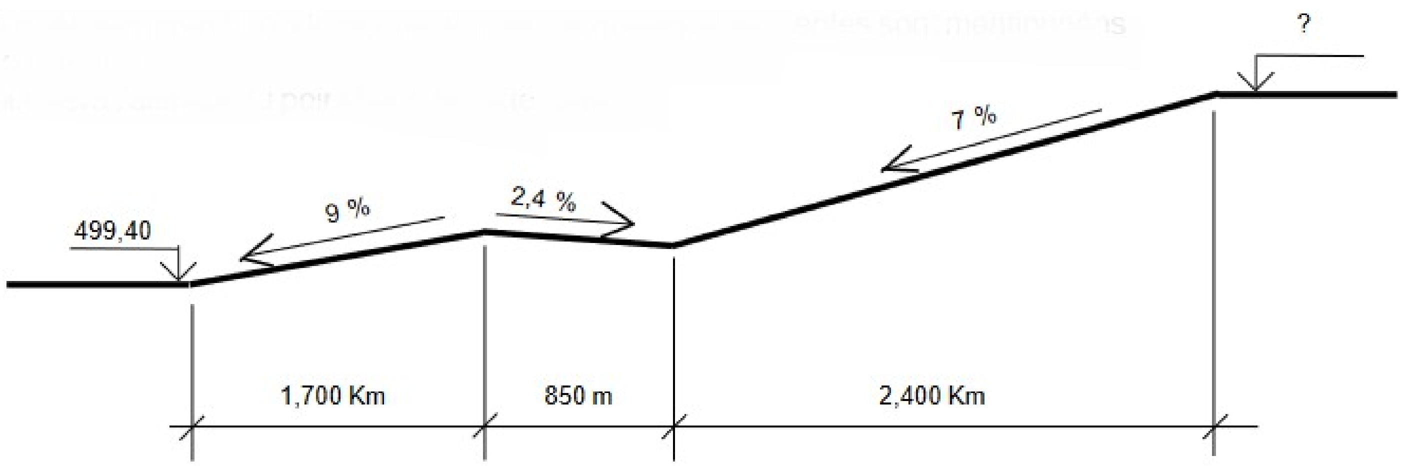


EXERCICE 11 :

La rampe d'accès d'un garage souterrain a une longueur horizontale de 36,00 m et une déclivité de 14 %.
Le haut de la rampe est à l'altitude de 402,92 m.
Quelle sera l'altitude du bas de la rampe ?



EXERCICE 12 : Une route comprend trois tronçons dont les longueurs et les pentes sont mentionnées sur ce croquis.
Quelle sera l'altitude du point haut de cette route ?



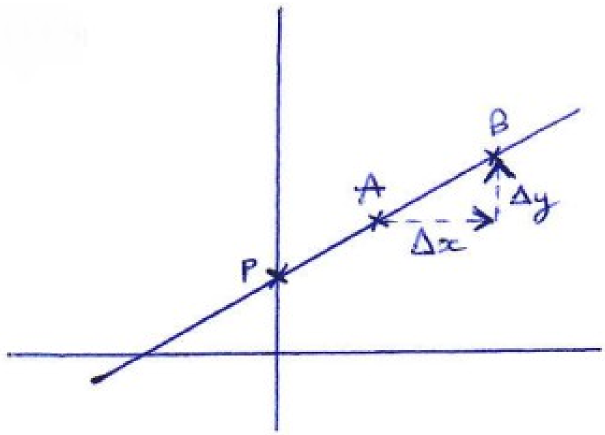
CHAPITRE 4 : EQUATIONS DE DROITES

$y = mx + p$

p : ordonnée à l'origine ; m : coefficient directeur

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Pour déterminer p : $y_A = m x_A + p$



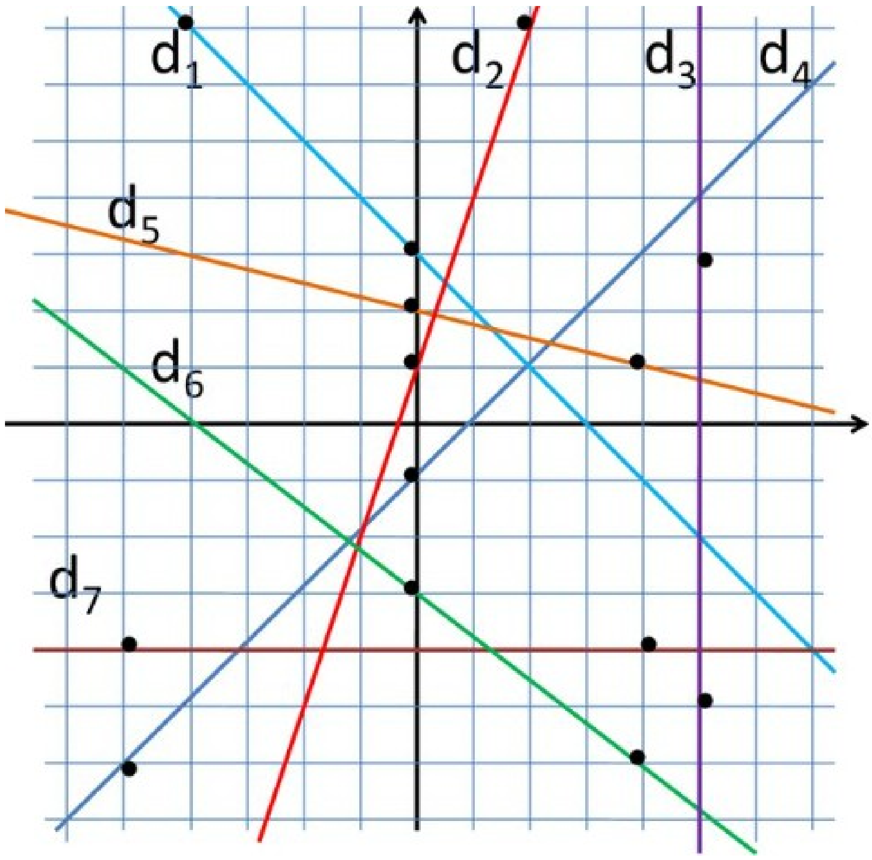
EXERCICE 1 :

Pour chacune des fonctions affines ci-dessous, tracer dans un repère la droite représentant la fonction.

$f(x) = -2x + 6$; $g(x) = 0{,}5x - 2{,}5$; $h(x) = 3x - 2$; $i(x) = -x + 1$; $j(x) = \dfrac{3}{2}x - 2$; $k(x) = \dfrac{-2}{3}x + 3$

EXERCICE 2 :

Déterminer les équations réduites des droites ci-dessous.



EXERCICE 3 :

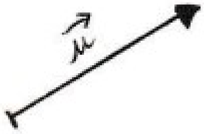
Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les deux points données.

1. $A(2 ; 3)$ et $B(6 ; 5)$
2. $C(-3 ; -1)$ et $D(9 ; 1)$
3. $E(1 ; 3)$ et $F(4 ; -1)$
4. $G(0{,}2 ; 5)$ et $H(0{,}1 ; 3)$
5. $I(3 ; -0{,}5)$ et $J(3{,}01 ; 1{,}5)$
6. $K\left(\dfrac{1}{2} ; 2\right)$ et $L\left(\dfrac{-1}{3} ; -\dfrac{3}{2}\right)$

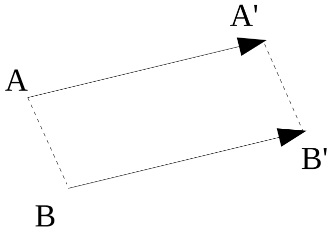
CHAPITRE 5 : VECTEURS DU PLAN

1. Vecteurs

Un vecteur $\vec{u}$ est défini par une direction, un sens et une longueur $\|\vec{u}\|$.



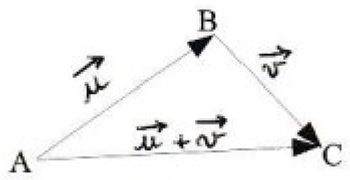
$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ Si et seulement si AA'B'B est un parallélogramme.



2. Addition de deux vecteurs

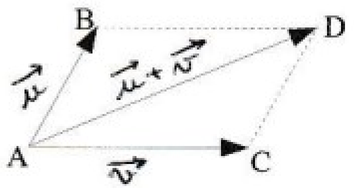
a. Relation de Chasles (vecteurs mis « bout à bout »)

Quels que soient les points A, B et C , $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



b. Règle du parallélogramme

Soient A, B, C et D quatre points.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ signifie que ABDC est un parallélogramme.



c. Vecteurs opposés

- Tout vecteur $\vec{u}$ a un opposé noté $-\vec{u}$ tel que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.
- $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont même direction et même longueur, mais des sens opposés.
- $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

d. Propriétés de l'addition

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (commutativité)
- $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ (associativité)

e. Soustraction

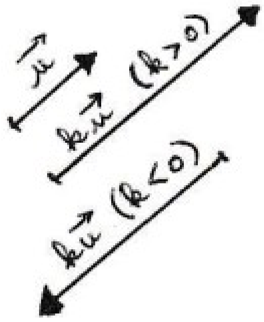
Pour soustraire un vecteur, il suffit d'ajouter son opposé.
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

3. Multiplication d'un vecteur par un réel

a. Définition

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. On définit le vecteur $k\vec{u}$ de la façon suivante :

- sa longueur est celle de $\vec{u}$ multipliée par $|k|$. ($\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$)
- il a la même direction que $\vec{u}$.
- si $k > 0$, il a le même sens que $\vec{u}$, si $k < 0$ il a le sens opposé.



b. Propriétés

- $1\vec{u} = \vec{u}$, $x\vec{0} = \vec{0}$ et $0\vec{u} = \vec{0}$.
- $x(y\vec{u}) = (xy)\vec{u}$.
- $(x+y)\vec{u} = x\vec{u} + y\vec{u}$.
- $x(\vec{u}+\vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$.

4. Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ si et seulement si les deux vecteurs ont même direction.

Conséquences

- Soient A, B et C trois points distincts. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Soient A, B, C et D quatre points distincts.Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

5. Coordonnées

- Si $A(x_A ; y_B)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B & -x_A \\ y_B & -y_A \end{pmatrix}$ et $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' = 0$.

EXERCICE 1 :

Compléter les égalités:

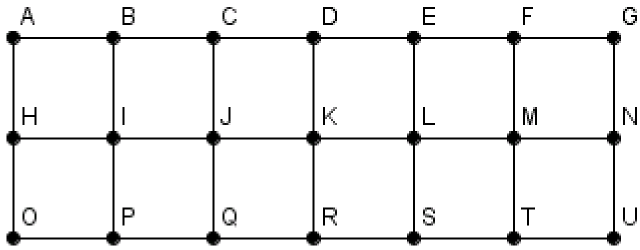
$\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EU}=\overrightarrow{A...}$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{A...}$

$\frac{1}{6}\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{EU}+2\,\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{D....}$

$\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{BS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{TB}-3\,\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{...\,I}$

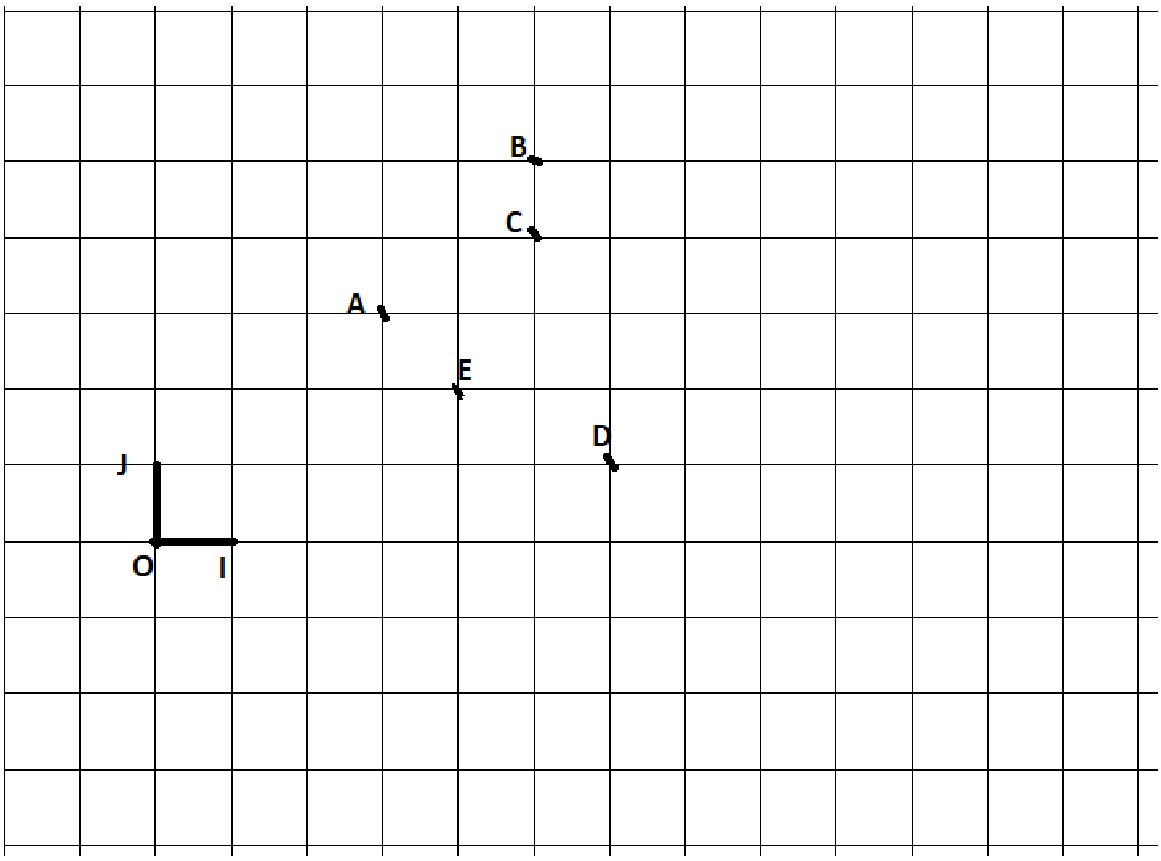
$5\,\overrightarrow{TU}+2\,\overrightarrow{GL}-\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{H....}$



EXERCICE 2:

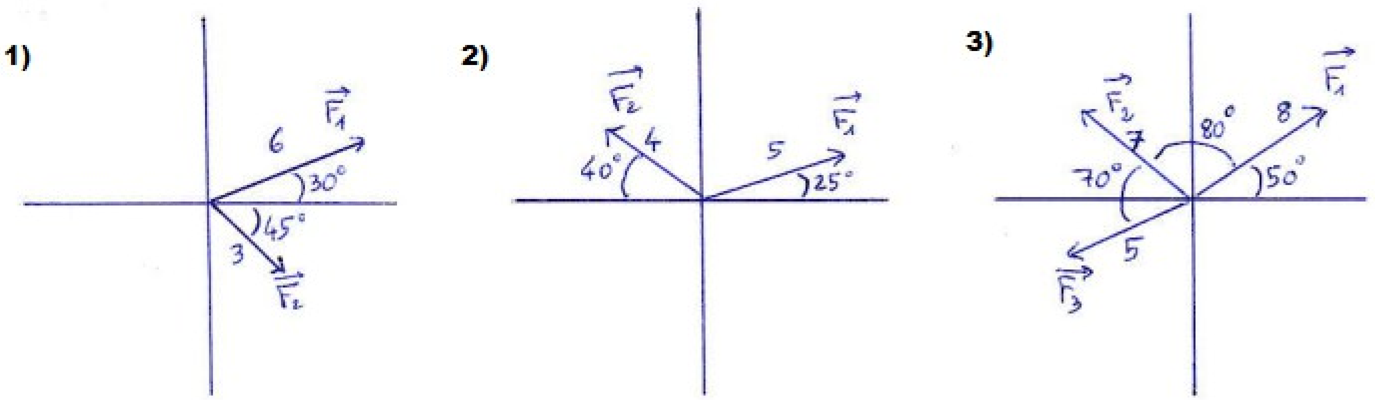
1) Dans le graphique ci-dessous, donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

2) Tracer les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}$, $\vec{w}=2\,\overrightarrow{AC}-3\,\overrightarrow{CB}$, $\vec{m}=2\,\overrightarrow{CA}-3\,\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$.



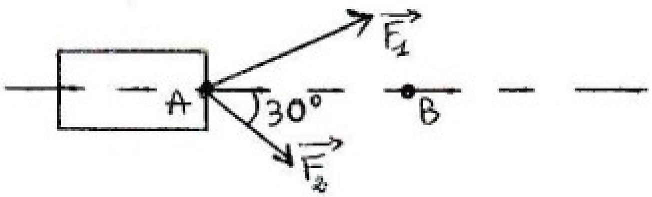
EXERCICE 3 :

Pour chaque figure donnée, calculer les coordonnées de chaque vecteur $\vec{F}_i$ et les coordonnées de la résultante $\vec{F}=\sum \vec{F}_i$. Calculer ensuite la norme $\|\vec{F}\|$ et l'angle $(\vec{i}\,;\vec{F})$.



EXERCICE 4 :

La figure montre deux remorqueurs qui amènent un navire dans le port. Le remorqueur le plus puissant génère une force de 20000 N sur son câble, le plus petit une force de 16000 N. Le navire suit une ligne droite de A à B et le petit remorqueur tire le navire suivant un angle de 30° avec le segment de droite AB. Calculer l'angle que forme le plus puissant remorqueur avec le segment de droite AB.



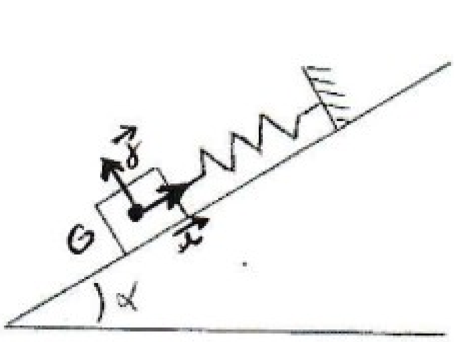
EXERCICE 5 :

Une masse m est accrochée à un ressort de raideur k sur un plan incliné d'angle α . On rappelle la formule suivante :

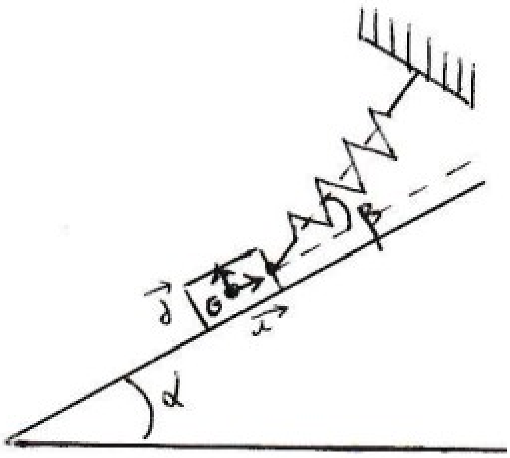
tension d'un ressort(N)=raideur($N.m^{-1}$) $\times$ déformation(m). On considére qu'il n'y a pas de frottement.

1) A l'équilibre, déterminer toutes les forces exercées sur cette masse. Exprimer les coordonnées de ces forces dans le repère $(G\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. On rappelle que le poids, vertical vers le bas, est donné par $\vec{P}=m\vec{g}$ avec $g=9{,}8\ kg.N^{-1}$.

2) On donne m=2 kg, α =10° et k =19 $N.m^{-1}$. Le ressort a une longueur à vide de 10 cm. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.



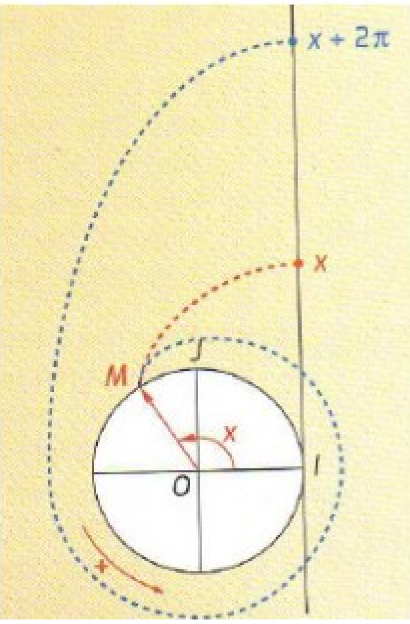
3) La masse est maintenant maintenue par le même ressort de raideur k et faisant un angle β avec le plan incliné. Exprimer les coordonnées des forces dans le repère $(G;\vec{i};\vec{j})$. On donne m=2 kg, α =10°, β=15° et k =19 $N.m^{-1}$. Le ressort a une longueur à vide de 10 cm. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.

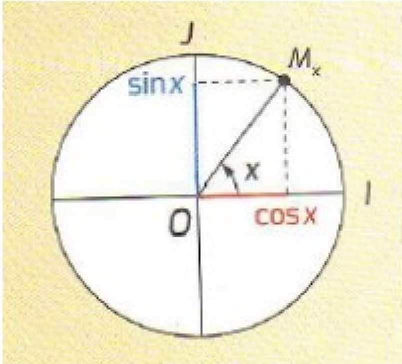


CHAPITRE 6 : FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

I. Définitions

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal. On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.
La droite D verticale tangente en I au cercle représente la droite des réels d'origine I. A tout réel x de la droite D, on associe un point M du cercle trigonométrique par enroulement de la droite des réels.

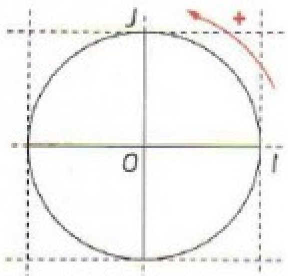




Le périmètre du cercle est $2\pi R=2\pi\times 1=2\pi$. Tout les réels de la forme $x+k2\pi$, où k est un entier relatif, s'enroulent sur le même point M.
On dit que le réel x est une **mesure de l'angle en radians de l'angle orienté** $(\vec{OI},\vec{OM})$.
La **mesure principale** de l'angle orienté $(\vec{OI},\vec{OM})$ est l'unique mesure de l'angle orienté $(\vec{OI},\vec{OM})$ située dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Def : L'abscisse du point M est le cosinus du réel x, noté $\cos(x)$.
L'ordonnée du point M est le sinus du réel x, noté $\sin(x)$.

Exemple: Placer les points correspondants sur le cercle trigonométrique et remplir le tableau.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$
$\cos(x)$							
$\sin(x)$							

II. Propriétés

Pour tout réel x,

$$\boxed{\begin{array}{l}-1\leq\cos(x)\leq 1\\ -1\leq\sin(x)\leq 1\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\cos(-x)&=&\cos(x)\\ \sin(-x)&=&-\sin(x)\end{array}}$$

On dit que la fonction $\cos$ est paire et la fonction $\sin$ est impaire.

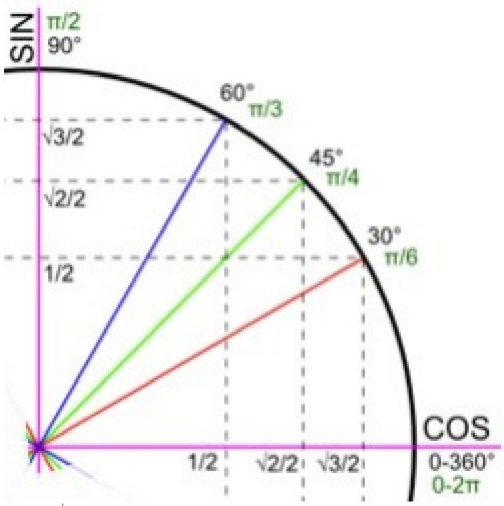
$$\boxed{\begin{array}{rcl}\cos(x+k2\pi) & = & \cos(x)\\ \sin(x+k2\pi) & = & \sin(x)\end{array}}$$

On dit que les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont périodiques de période 2π .

$$\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}$$

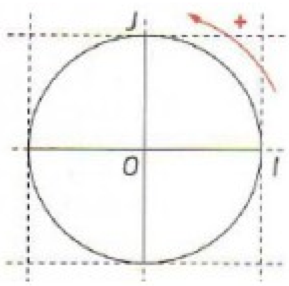
$$\begin{array}{rcl}\cos(\pi-x) & = & -\cos(x)\\ \sin(\pi-x) & = & \sin(x)\end{array} ; \begin{array}{rcl}\cos(\pi+x) & = & -\cos(x)\\ \sin(\pi+x) & = & -\sin(x)\end{array} ; \begin{array}{rcl}\cos(\frac{\pi}{2}-x) & = & \sin(x)\\ \sin(\frac{\pi}{2}-x) & = & \cos(x)\end{array} ; \begin{array}{rcl}\cos(\frac{\pi}{2}+x) & = & -\sin(x)\\ \sin(\frac{\pi}{2}+x) & = & \cos(x)\end{array}$$

valeurs remarquables :



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple : Placer les points correspondants sur le cercle trigonométrique et remplir le tableau.



x	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	24π	-3π
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Formules de linéarisation

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Formules de factorisation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

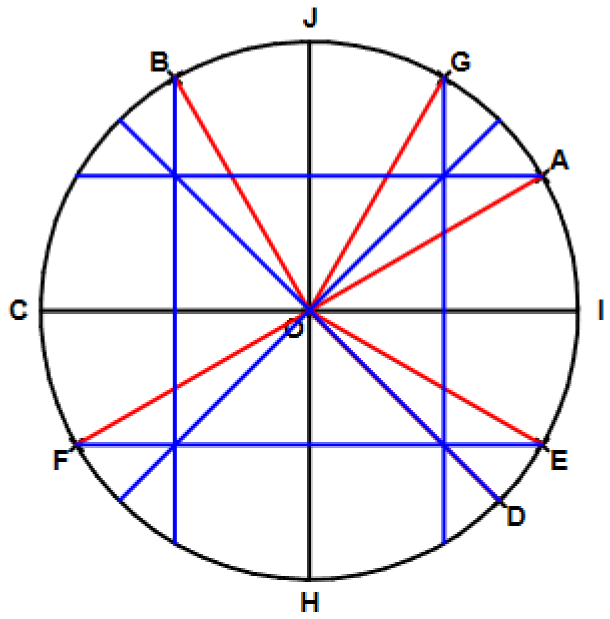
cos x, sin x et tan x en fonction de t=tan(x/2)

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Divers

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$
$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$
$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

EXERCICES TRIGONOMETRIE



EXERCICE 1 :
Dans le cercle trigonométrique ci-dessus, donner les angles orientés en radian associés aux points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et les valeurs des cosinus et sinus associés.

EXERCICE 2 :
Dans le cercle trigonométrique ci-dessus, placer les points associés aux angles suivants et donner les valeurs des cosinus et sinus associés : $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{-11\pi}{6}$; 2021π ; $\frac{13\pi}{3}$; $\frac{-31\pi}{6}$; $\frac{-15\pi}{4}$

EXERCICE 3 :
Dans le cercle trigonométrique ci-dessus, donner une valeur des angles orientés suivants :
$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OG})$; $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OE})$; $(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OF})$; $(\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OF})$; $(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OC})$

EXERCICE 4 :

On considère un réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

1) Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.
2) On sait que $x \in \left\{\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12};-\frac{\pi}{12};-\frac{5\pi}{12}\right\}$. Déterminer la valeur exacte de x.

EXERCICE 5 :

1) Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer la valeur de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.
2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

EXERCICE 6 :
A l'aide des formules de duplication, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

EXERCICE 7 :
En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 8 :
Montrer que

$$(\cos(x)+\sin(x))^2=1+\sin(2x)$$

$$1+2\cos(x)+\cos(2x)=2\cos(x)(1+\cos(x))$$

$$4\cos^2(x)+2\sin^2(x)=3+\cos(2x)$$

$$\cos^4(x)-\sin^4(x)=\cos(2x)$$

$$\sin(x)+\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x+\frac{4\pi}{3})=0$$

$$\sin(3x)=3\sin(x)-4\sin^3(x)$$