Chapitre 3

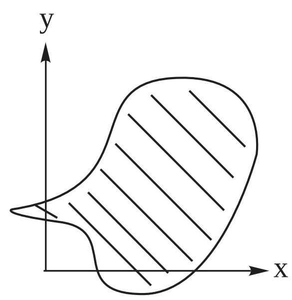
Equations aux dérivées partielles

3.1 Qu'est-ce qu'une EDP ?

Soit $u = u(x, y, ...)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes en nombre fini .
Une EDP pour la fonction u est une relation qui lie :
– les variables indépendantes $(x, y, ...)$.
– la fonction "inconnue" u (variable dépendante).
– un nombre fini de dérivées partielles de u.

$$\Rightarrow \mathrm{F}(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ...) = 0 \qquad (3.1)$$

u est solution de l'EDP si, après subsitution, la relation $\mathrm{F}(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ...) = 0$ est satisfaite pour $x, y, ...$ appartenant à une certaine région Ω de l'espace des variables indépendantes.



Remarque
Sauf mention contraire, on exige que la fonction u et les dérivées partielles intervenant dans l'EDP soient continues sur Ω.

Les EDP interviennent très souvent dans les problèmes physiques : en électromagnétisme (équations de Maxwell), en mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes), en mécanique quantique (équation de Schrödinger $i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t) + \mathrm{V}(x)\Psi(x,t)$), ...

Exemple

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x,y)$ (équation de diffusion)

  $u_1(x,y) = 2x + y^2$ solution dans tout $\mathbb{R}^2$.

  $u_2(x,y) = e^{-x}\sin(y)$ solution dans $\mathbb{R}^2$.

  $u_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi x}} e^{-\frac{y^2}{4x}}$ solution dans $\Omega \begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

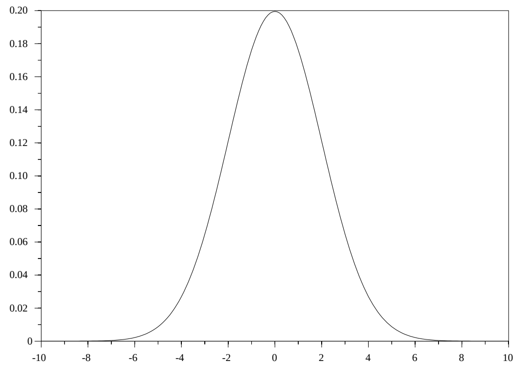


FIG. 3.1 – $u_3(x,y)$ avec $x = 2$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u_3(x,y)\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4x}}\,\mathrm{d}y \quad \text{on pose} \quad u = \frac{y}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 1
\end{aligned}$$

Remarque 1

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
\mathrm{I}^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \iint e^{-\left(u^2+v^2\right)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Remarque 2

$\lim\limits_{x\to 0^+} u_3(x,y)$ est la distribution de Dirac.

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ où $u=u(x,y)$
  La fonction $u:(x,y)\longrightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ est solution dans $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$

Rq : Considérons $\left\{\begin{array}{l} r \\ \\ \theta \end{array}\right.$ coordonnées polaires

$\tilde{u}(r,\theta)=u(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}$

On cherche une solution $\tilde{u}$ radiale, c'est-à-dire indépendante de θ.

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}=\frac{\alpha}{r}\qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow\quad \tilde{u}(r)=\alpha\ln(r)+\beta\qquad (\beta\in\mathbb{R})$$
$$\Rightarrow\quad u(x,y)=\tfrac{\alpha}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\beta$$

Remarque

Signification du Laplacien.

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ avec $u=u(x,y)$

Soit $\varepsilon>0$

$$u(x-\varepsilon,y)=u(x,y)-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)$$

$$u(x+\varepsilon,y) = u(x,y) + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x-\varepsilon,y) - 2u(x,y) + u(x+\varepsilon,y)}{\varepsilon^2} + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)$$

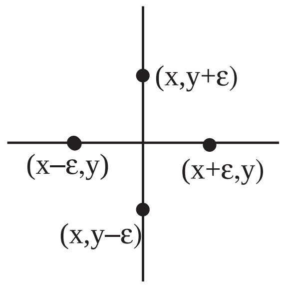
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x,y-\varepsilon) - 2u(x,y) + u(x,y+\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x-\varepsilon,y) + u(x+\varepsilon,y) + u(x,y-\varepsilon) + u(x,y+\varepsilon) - 4u(x,y)}{\varepsilon^2} + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)$$

Si u est solution de $\Delta u = 0$, alors :

$$u(x,y) = \frac{1}{4}\left[u(x-\varepsilon,y) + u(x+\varepsilon,y) + u(x,y-\varepsilon) + u(x,y+\varepsilon)\right]$$

$\Delta u = 0$ signifie que la valeur de u en un point est égale à la valeur moyenne de u sur les quatre plus proches voisins (voir schéma).

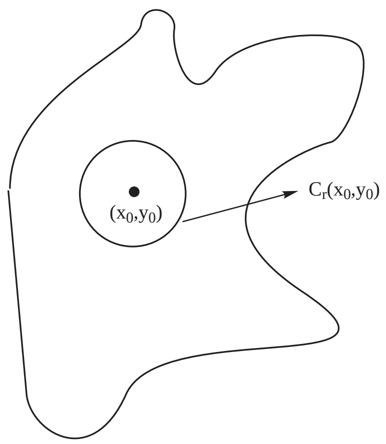


- u ne peut pas être extremum en (x,y).
- u est solution de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans Ω.
- Plus généralement, sur un ouvert connexe, on montre que :

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{R}}\int_{\mathrm{C_R}(x_0,y_0)} u(x,y)\mathrm{d}l = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)d\theta$$

Principe du Maximum

Soit $u(x,y)$, une fonction solution de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans un ouvert borné connexe Ω de $\mathbb{R}^2$.
On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω.
On suppose de plus u continue dans $\Omega \cup \partial\Omega$ qui est une région fermée du plan.
Si u n'est pas une fonction constante sur $\Omega \cup \partial\Omega$ alors la valeur maximale de u et la valeur minimale de u sont atteintes uniquement sur $\partial\Omega$.



Exemple

$$u : (x, y, z) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ est solution de } \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$$

On peut considérer ici l'analogie avec une charge à l'origine.

3.2 Généralités sur les EDP

Définition

On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.

Exemple

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\quad 1^{\text{er}}$ ordre.

Définition

Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et "à la puissance 1" dans l'EDP, celle-ci est dite linéaire.

Exemple

$u = u(x, y)$

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\quad 1^{\text{er}}$ ordre linéaire.
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$ $\quad 1^{\text{er}}$ ordre non-linéaire.
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\quad 2^{\text{ème}}$ ordre non-linéaire.

Remarque

$\cos\left(xy^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = \tan\left(x^2+y^2\right)$ 1^er ordre, linéaire, inhomogène.

• Pour une EDP linéaire homogène :

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \text{ solution} \\ u_2 \text{ solution} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda u_1 + \mu u_2 \text{ est solution.}$$

3.3 EDP linéaires du 1^er ordre

$$\mathrm{A}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{B}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{C}(x,y)u = \mathrm{D}(x,y)$$

est la forme la plus générale pour une EDP $\left\{\begin{array}{l} \text{linéaire} \\ 1^{\text{er}}\text{ordre} \end{array}\right.$

Exemple

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

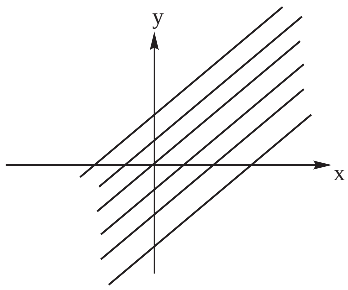
$\mathrm{d}u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \dfrac{\partial u}{\partial y}(\,\mathrm{d}y - \,\mathrm{d}x)$

Si $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont reliés par $\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$, alors $\mathrm{d}u = 0$

Sur chacune des courbes de la famille $y - x = \xi \quad (\xi \in \mathbb{R})$, la fonction u est constante. u ne dépend de que ξ.

Donc $\boxed{u(x,y) = f(\xi) = f(x-y)}$ où f est une fonction arbitraire d'une seule variable, de classe $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$

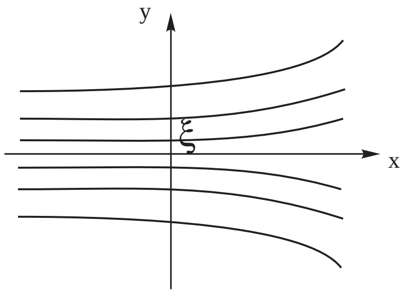
Les droites $y - x = \xi$ sont les caractéristiques de l'EDP considérée.



(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ avec $u = u(x,y)$, est une EDP du 1^er ordre, linéaire, homogène.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\ &= (-y\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y)\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Si $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}x$ sont reliés par $-y\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y = 0$, alors $\underline{\mathrm{d}u = 0}$.
u est constante le long des courbes $y = \xi e^x$.



Conclusion

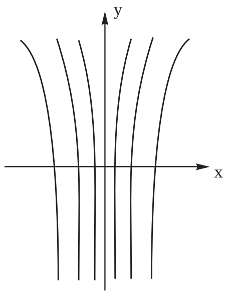
La solution générale de $\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ est de la forme :

$$u(x, y) = f(ye^{-x}) \text{ où f est } \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$$

(3) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(2u - x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}y\right) + u\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont reliés par $\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{d}y = 0$, alors $\underline{\mathrm{d}u = u\,\mathrm{d}y}$.

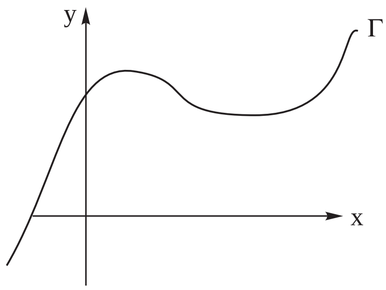


$x = \xi e^{\frac{y}{2}}$. Sur chacune de ces courbes, $u = cste.e^y$

<u>Conclusion :</u> La solution générale est de la forme : $\boxed{u(x,y) = e^y f\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)}$

Proposition

Si on impose les valeurs de u sur une courbe Γ *qui n'est pas une caractéristique de l'EDP, alors on peut identifier la fonction* f.



Si on impose : $u(x, y=0) = \varphi(x)$ (φ est donnée)
alors il vient : $u(x, y=0) = f(x) = \varphi(x)(\forall x \in \mathbb{R})$
et par suite :
$f \equiv \varphi$ et $u(x,y) = e^y.\varphi\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)$
d'où :
$\boxed{u\left(x,y\right) = e^y.\varphi\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)}$

Remarque

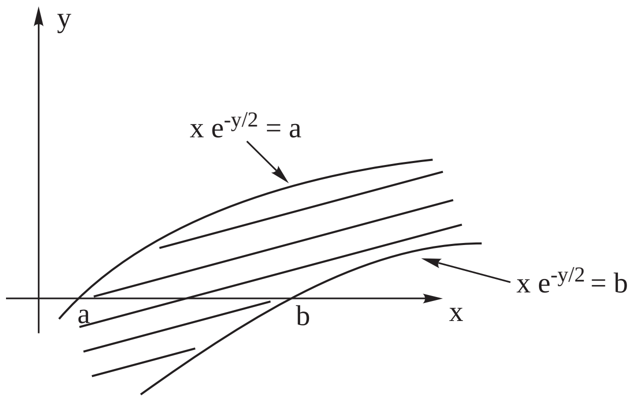
Si on impose $u(x, y=0) = \varphi(x)$ uniquement sur $x \in [\,a\,,\,b\,]$ alors :

$\forall x \in$ à la zone hachurée, $u(x,y) = e^y.\varphi\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)$ En dehors de la zone hachurée, la solution est de la forme $u(x,y) = e^y f(xe^{\frac{-y}{2}})$ avec f indéterminée (comme on exige u continue, il faut que :
$\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right) = \varphi\left(a\right)$
$\lim\limits_{x\to b^+} f\left(x\right) = \varphi\left(b\right)$

3.4 Classification des EDP linéaires du 2$^{\text{nd}}$ ordre, à coefficients constants

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{D}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{F}u + \mathrm{G} = 0$$

Les trois premiers termes correspondent à <u>la partie principale</u>. A,B,...,G sont des constantes. Le type de l'EDP dépend du signe de $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}$.



<u>Classification :</u>

Si $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} > 0$, alors l'EDP est dite hyperbolique.

Si $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$, alors l'EDP est dite parabolique.

Si $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} < 0$, alors l'EDP est dite elliptique.

<u>Exemple</u>

(i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec $c > 0$
$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 4c^2 > 0$. Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec $d > 0$
$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$. Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique.

(iii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = -4 < 0$. Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

(iv) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$: Equation de Tricomi.

- $y > 0 \Rightarrow$ l'EDP est hyperbolique.
- $y = 0 \Rightarrow$ l'EDP est parabolique.
- $y < 0 \Rightarrow$ l'EDP est elliptique.

3.5 Conditions aux frontières et problème "bien posé"

Soient $u = u(x, y)$ et une EDP valide dans Ω domaine (ouvert connexe).

Trois types de conditions aux frontières existent :

1. On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Dirichlet.
2. On impose la valeur de $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\ u\right).\vec{n}$. C'est la condition de Neumann.

3. On impose ces deux conditions sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Cauchy.

Remarque

Si l'EDP est valide dans tout l'espace, il n'y a pas de frontière. (On impose alors souvent des conditions à l'infini.)

Problème "bien posé"

Soit une EDP valide dans Ω, munie de conditions aux frontières. Le problème est bien posé si :

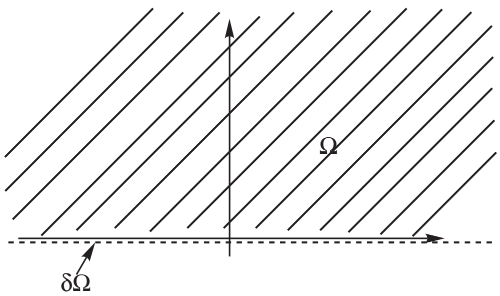
1. il existe une solution de l'EDP satisfaisant les conditions frontières (existence).
2. la solution doit être unique (unicité).
3. la solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).

Exemple

Equation de Laplace en deux dimensions :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ avec } \Omega = \{-\infty < x < +\infty; y > 0\}$$

Conditions aux frontières : (Cauchy)
- $u(x, y = 0) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Remarque

Si $f = g = 0 \Rightarrow u \equiv 0$

On consière (i) $\begin{cases} g \equiv 0 \\ f(x) = \frac{1}{n}\cos(nx) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^\star$

Alors $u(x, y) = \frac{1}{n}\cos(nx)\,\mathrm{ch}\,(ny)$

Lorsque n est grand, la condition $u(x, y = 0) = \frac{1}{n}\cos(nx)$ diffère peu de la condition $u(x, y = 0) = 0$.

La solution, elle, diffère beaucoup à cause du cosinus hyperbolique, le problème n'est pas stable et donc il est "mal posé".

Tableau récapitulatif
Pour une EDP du second ordre linéaire à coefficient constants, on a un problème bien posé dans les cas suivants (conditions suffisantes) :

Type	Frontière	Conditions
Hyperbolique	ouverte	Cauchy
Parabolique	ouverte	Dirichlet ou Neumann
Elliptique	fermée	Dirichlet ou Neumann

3.6 Equation des ondes

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Solution générale : $\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}$

$\mathrm{U}(\xi, \eta) = u(x,t)$ ainsi $\boxed{\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \xi \partial \eta} = 0}$: forme canonique.

$\Rightarrow \mathrm{U}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ f, g sont des fonctions arbitraires de classe $\mathrm{C}^2(\mathrm{R})$

$$\boxed{u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)}$$

Toute partie principale d'une solution d'une équation hyperbolique peut être mise sous cette forme.

On impose les conditions aux limites :

- $u(x,0) = \phi(x)$, avec ϕ de classe $\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$
- $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, avec ψ de classe $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$

Solution de d'Alembert :

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x-ct) + \phi(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds}$$

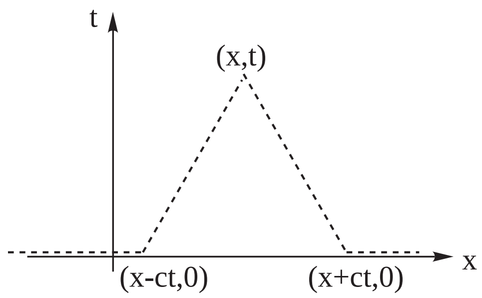
En un point (x,t) avec $t > 0$, la valeur de $u(x,t)$ dépend uniquement des valeurs de ϕ en $x - ct$ et $x + ct$ et des valeurs de ψ dans l'intervalle $[x - ct, x + ct]$. L'intervalle [x-ct,x+ct] est dit être l'intervalle de dépendance du point (x,t).

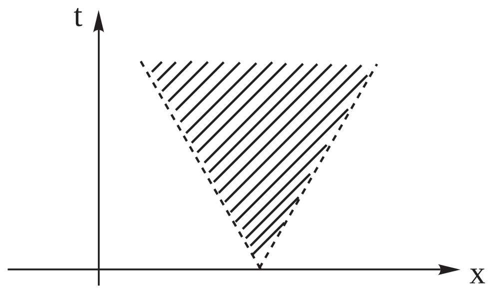
D'un point de vue inverse : les valeurs de u et de $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ en $(x = x_0, t = 0)$ n'influent sur $u(x,t)$ que si (x,t) appartient à la zone hachurée.

3.7 Equation de diffusion

3.7.1 Equation de diffusion sur l'ensemble de la droite $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \ (\mathrm{D} > 0)$$





Condition initiale : $u(x,0) = \phi(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$, ϕ étant continue et bornée.
On va montrer que la solution est :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mathrm{D}t}} \,\mathrm{d}y$$

Proposition

$$u(x,t) \text{ ci-dessus est } \mathrm{C}^\infty \text{ sur } \{-\infty < x < +\infty, t > 0\}$$

On définit :

$$\mathrm{G}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}} \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0$$

G est la solution fondamentale ou "fonction de Green" pour l'équation de Diffusion.
On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}(x,t)\,\mathrm{d}x \ = \ 1$, pour t>0.

On peut alors écrire :

$$\boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \mathrm{G}(x-y,t)\,\mathrm{d}y}$$

onde.nb 1

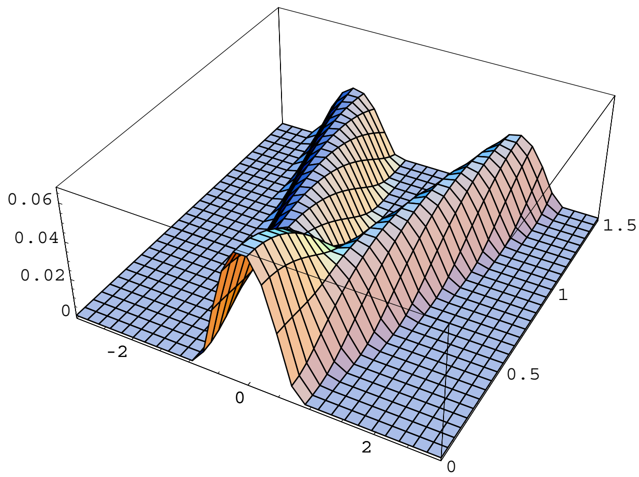


FIG. 3.2 – Solution de d'Alembert à l'équation des ondes (x en horizontal, ct en profondeur) dans le cas où $\phi = \exp(\frac{-1}{1-x^2})$ si $|x| < 1$ et 0 sinon

Remarques

- Il s'agit d'un produit de convolution.
- La "vraie" fonction de Green est :

$$g(x,t) = \mathrm{H}(t)\frac{e^{\frac{-x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi\mathrm{D}t}} \quad \text{définie sur } \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R}^*$$

  (g se réduit à G sur $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^{+*}$).

<u>Démonstration</u>

On utilise la transformée de Fourier :

$$\hat{u}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

En prenant la transformée de Fourier,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \implies \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \mathrm{D}(ik)^2\hat{u} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\mathrm{D}k^2\hat{u} \implies \hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0)e^{-\mathrm{D}k^2t}$$

Or, en notant $\hat{\phi}$ la transformée de Fourier de ϕ, $\hat{u}(k,0) = \hat{\phi}(k)$ donc $\hat{u}(k,t) \; = \; \hat{\phi}(k)e^{-\mathrm{D}k^2t}$

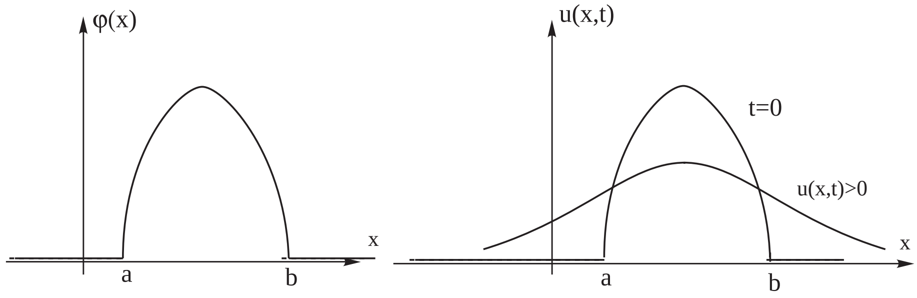
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(k)e^{-\mathrm{D}k^2t}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \phi(y)\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{D}t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mathrm{D}t}}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Rappel

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\mathrm{D}k^2t}] = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{D}t}}e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}$$

Remarques

- Cette démonstration par la TF suppose que $\phi \in \mathcal{L}^1$, mais le résultat reste vrai si ϕ n'est que continue et bornée.
- Si $\phi(x)$ est continue par morceaux et bornée alors la fonction $u(x,t) \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi\mathrm{D}t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mathrm{D}t}}\mathrm{d}y$ est solution de l'équation : $\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; = \; 0$.
  Mais quand $t \to 0^+$, la fonction $u(x,t) \to \frac{1}{2}(\phi(x^-) + \phi(x^+))$, quand x est un point de discontinuité de ϕ.
  $u(x,t)$ reste C^∞ sur $\{-\infty < x < +\infty, t > 0\}$.



– Si $\phi(x) = \begin{cases} > 0 \text{ sur } [a,b] \\ 0 \text{ en dehors de } [a,b] \end{cases}$ alors $u(x,t) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ (t > 0)$
Cela correspond à une "vitesse de propagation infinie".

Cas particulier :
$\phi(x) = \begin{cases} 1 \ si \ |x| < 1 \\ 0 \ si \ |x| > 1 \end{cases}$
On a alors (pour tout $t > 0$)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{erf\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right) - erf\left(\frac{-(1-x)}{2\sqrt{t}}\right)\right\}$$

(voir figure 3.3) où $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\beta^2} d\beta$ est la fonction erreur.

Remarque :

$$\lim_{t\to 0^+} u(x=1,t) = \frac{1}{2} \quad \lim_{t\to 0^+} u(x=-1,t) = \frac{1}{2}$$

3.7.2 Equation de diffusion avec un terme source

On cherche à résoudre le problème de diffusion en incluant un terme source $f(x,t)$
$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, f \text{ continue} \\ u(x,0) = \phi(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Par linéarité, on peut séparer le problème en deux :
Problème A $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$
Problème B $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \ \ , f \text{ continue} \\ u(x,0) = 0 \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Problème A : $u(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)\mathrm{G}(x-y,t)\,\mathrm{d}y$

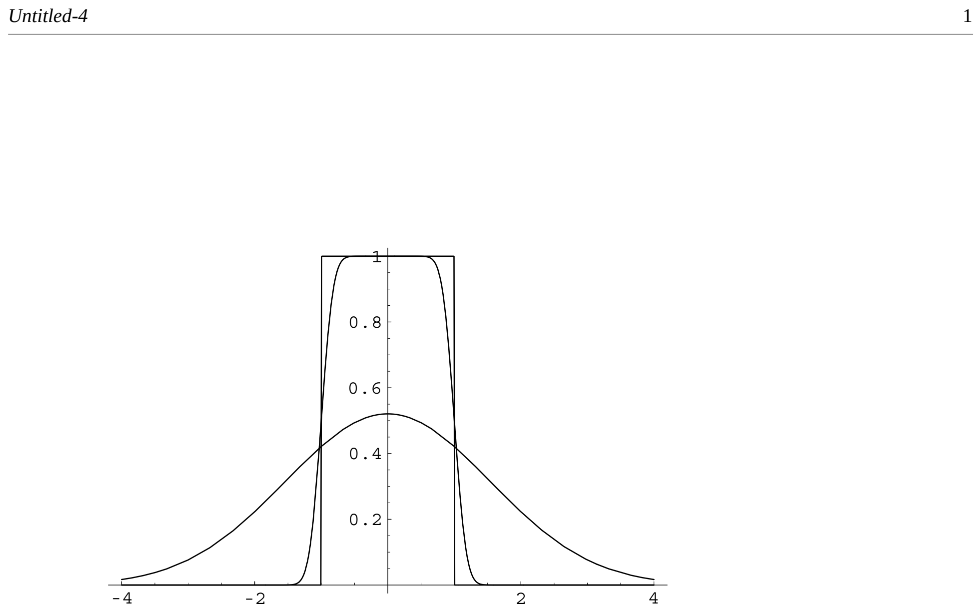


FIG. 3.3 – Solution de l'équation de diffusion à $t = 0, 0.01$ et 1 dans le cas $\phi(x) = 1$ *si* $|x| < 1$ *et* 0 *si* $|x| > 1$

Problème B : On remplace le terme source par une condition initiale.
$v(x,t)$ est solution de l'équation de diffusion.

Problème B' $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \ x \in \mathbb{R}, t > \tau \\ v(x, t = \tau) = f(x, t = \tau) \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Soit $v(x, t = \tau)$ la solution du problème B'.

$$v(x, t = \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}(x - y, t - \tau) f(y, \tau) \, \mathrm{d}y$$

Proposition

(Principe de Duhamel)
La fonction u définie par $u(x,t) = \displaystyle\int_0^t v(x,t,\tau) d\tau$ *est solution du problème B.*

Solution du problème initial

$$\boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)\mathrm{G}(x-y,t) \, \mathrm{d}y + \int_0^t (\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}(x-y,t-\tau) f(y,\tau) \, \mathrm{d}y) d\tau}$$

3.7.3 Solution élémentaire (fonction de Green) de l'opérateur de diffusion

Distribution dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

On appelle $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et à support borné.

Exemple
(n=3)

$$\begin{array}{rcl} \zeta : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \rightarrow & \zeta(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \exp(\dfrac{-1}{1 - r^2}) \text{ si } r < 1 \\ 0 \text{ si } r \geqslant 1 \end{cases} \end{array}$$

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

Définition

On appelle distribution de $\mathbb{R}^n$ un élément de l'ensemble des fonctionnelles linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, localement sommable. On peut lui associer une distribution régulière T_f telle que :

$$\langle \mathrm{T}_f, \varphi \rangle = \int f(x_1, ..., x_n) \varphi(x_1, ..., x_n) d\mu(x_1) ... d\mu(x_n) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Distribution de Dirac :
$\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$
$\varphi(x_1, ..., x_n) \longmapsto \varphi(0, ..., 0)$

Dérivées partielles dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *(l'ensemble des distributions sur* $\mathbb{R}^n$*). Alors,*

$$\langle \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle \mathrm{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

C'est la dérivée partielle de la distribution.

Remarques

– Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathrm{T} * \delta = \mathrm{T}$

– Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{S} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\mathrm{T} * \mathrm{S}$ existe. Alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{T} * \mathrm{S}) = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i} * \mathrm{S} = \mathrm{T} * \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i}$$

Définition

Soit L *un opérateur différentiel linéaire, d'ordre* n $(n \in \mathbb{N})$, *à coefficients constants. Une distribution* E *de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *satisfaisant à :*

$$\mathrm{LE} = \delta$$

est dite solution fondamentale de l'opérateur L.

Remarque
Si E est une solution fondamentale de L et si $\mathrm{E}_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est tel que $\mathrm{LE}_0 = 0$, alors $\mathrm{E} + \mathrm{E}_0$ est aussi solution fondamentale pour L.

Proposition

Tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants admet une solution fondamentale (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$*).*

Proposition

Soit L *un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre* n. *Soit* E *une solution fondamentale de* L $(\mathrm{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)/\mathrm{LE} = \delta)$. *Soit* $\mathrm{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\mathrm{E} * \mathrm{F}$ *existe dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *alors la distribution* $\mathrm{U} = \mathrm{E} * \mathrm{F}$ *est solution de* $\mathrm{LU} = \mathrm{F}$.

3.7.4 Solution fondamentale de l'opérateur de diffusion

$$\mathrm{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$$

Considérons la fonction :

$$\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{H}(t)}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} e^{\frac{-x^2}{4\mathrm{D}t}} \end{array}$$

H(t) est la fonction de Heavyside.

La fonction $g(x,t)$ étant localement sommable sur $\mathbb{R}^2$, on peut lui asssocier une distribution régulière notée T_g.

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{T}_g, \varphi \rangle &= \iint g(x,t)\varphi(x,t)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(t) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ &= \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty[} \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Calculons $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathrm{T}_g$:

$$\begin{aligned} \langle \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathrm{T}_g, \varphi \rangle &= -\langle \mathrm{T}_g, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \rangle \\ &= -\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}_\varepsilon \end{aligned}$$

Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{16\pi}} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty[} \left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

De même,

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{J}_\varepsilon$$

Après deux intégrations par parties (variable x),

$$\mathrm{J}_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{16\pi}} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in[0,+\infty[} \left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{I}_\varepsilon + \mathrm{J}_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\mathrm{D}\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\langle\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathrm{T}_g, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{I}_\varepsilon + \mathrm{J}_\varepsilon \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} -\frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\mathrm{D}\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x \text{ on pose } y^2 = \frac{x^2}{4\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\frac{\varphi(2\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}y \\
&= \varphi(0,0)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathrm{T}_g = \delta} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$

où δ est la distribution de Dirac : $< \delta, \varphi >= \varphi(0,0)$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$
T_g est donc une solution élémentaire de l'opérateur de diffusion.

Remarque
Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ dont le produit de convolution avec T_g existe, alors $\mathrm{F} * \mathrm{T}_g$ satisfait $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{F} * \mathrm{T}_g = \mathrm{F}$.

Cas particulier :
F est une distribution régulière, notée T_f, associée à une fonction f de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ localement sommable.

$$\mathrm{F} * \mathrm{T}_g = \mathrm{T}_f * \mathrm{T}_g = \mathrm{T}_{f*g}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{T}_{f*g} = \mathrm{T}_f$$

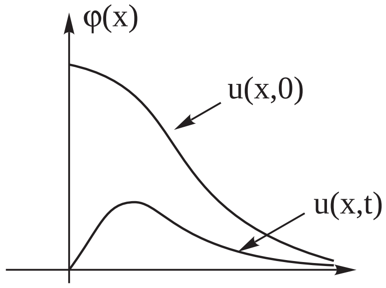
On peut alors dire que :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(f*g)(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

3.7.5 Equation de diffusion sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}^{+*}, \ \ t \in \mathbb{R}^{+*}$$

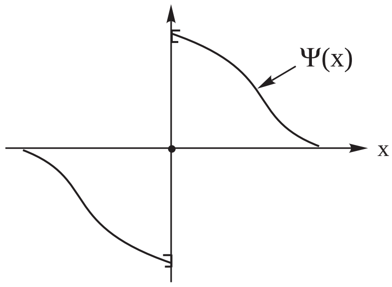
On impose $u(x=0,t) = 0$, quand $t > 0$. La condition initiale est : $u(x,0) = \phi(x)$, $x > 0$
On définit :



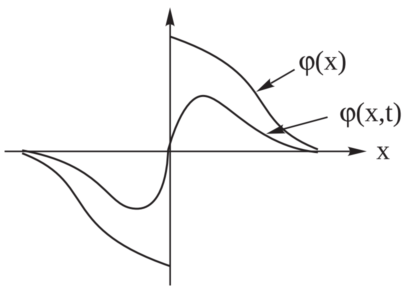
$$\psi(x) \begin{cases} \phi(x) \;\; \text{si } x > 0 \\ 0 \;\; \text{si } x = 0 \\ -\phi(-x) \;\; \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque

$$\psi(0) = \frac{1}{2}[\psi(0^+) + \psi(0^-)] = 0$$



$$v(x,t) \text{ est solution de } \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \;, \;\; x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x,0) = \psi(x) \;, \;\; x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



$$\begin{cases} v(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y,t)\psi(y)\,\mathrm{d}y \\ v(x=0, t>0) = 0 \end{cases}$$

$\lim_{t\to 0^+} v(x,t) = \psi(x)$
La restriction de $v(x,t)$ à $x > 0$ est bien la fonction $u(x,t)$ recherchée.
Pour t>0, x>0 :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y,t)\psi(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} (g(x-y,t) - g(x+y,t))\phi(y)\,\mathrm{d}y$$

Donc,

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} \int_0^{+\infty} (e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mathrm{D}t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4\mathrm{D}t}})\phi(y)\,\mathrm{d}y}$$

Cas particulier
$\phi(x) = 1$ pour $x > 0$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\mathrm{D}t}}} e^{-r^2} dr \\ &= \mathrm{erf}(\frac{x}{\sqrt{4\mathrm{D}t}}) \end{aligned}$$

où $\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-r^2} dr$ est la fonction erreur.

3.8 Equation de diffusion sur un domaine spatial borné

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < l,\ t > 0$$

- $u(x=0,t) = 0,\ t > 0$
- $u(x=l,t) = 0,\ t > 0$
- $u(x,0) = \varphi(x)$ pour $0 < x < l$

On utilise la méthode de séparation des variables en posant $u(x,t) = f(x)g(t)$.
L'équation de diffusion devient donc :

$$f(x)g'(t) - \mathrm{D}f''(x)y(t) = 0$$

$$\frac{1}{\mathrm{D}}\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = cste = -\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Soit $\begin{cases} g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \\ f''(x) = -\lambda f(x) \end{cases}$
On se ramène donc à des équations différentielles ordinaires.
$x = 0 \Longrightarrow f(0)g(t) = 0$
$x = l \Longrightarrow f(l)g(t) = 0$
On ne retient que la solution $f(0) = f(l) = 0$, en rejetant la solution $g(t) = 0$.

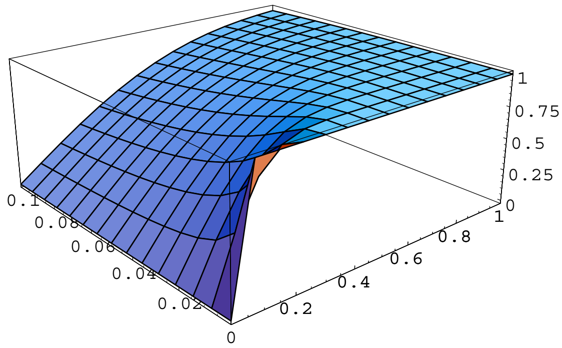


FIG. 3.4 – Fonction erf $\left(\frac{x}{\sqrt{4\mathrm{D}t}}\right)$ en fonction de x et $\mathrm{D}t$

Fonction f(x)

La fonction f est solution du problème $\begin{cases} f''(x) = -\lambda f(x) \\ f(x=0) = 0 \;\; f(x=l) = 0 \end{cases}$

Il s'agit d'un cas particulier d'un problème plus général : le problème de *Sturm-Liouville*. Les valeurs de λ pour lesquelles il existe une solution non nulle sont dites valeurs propres. Les fonctions f associées sont dites fonctions propres.

- Si $\lambda = 0$: $f(x) = ax + b$
  $f(0) = f(l) = 0 \Longrightarrow a = b = 0$
  $\lambda = 0$ n'est donc pas valeur propre.
- Si $\lambda < 0$: $\lambda = -k^2$
  $f(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$
  $f(0) = f(l) = 0 \Longrightarrow a = b = 0$
  $\lambda < 0$ n'est donc pas valeur propre.
- Si $\lambda > 0$: $\lambda = +k^2$
  $f(x) = a\cos kx + b\sin kx$
  $f(0) = f(l) = 0 \Longrightarrow a = 0$ et $b\sin kl = 0$ donc $k = k_n = \dfrac{n\pi}{l}$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$
  On a donc $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
  Les fonctions propres sont donc $\boxed{f = f_n = b\sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction g(t)

$g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \Longrightarrow g(t) = cste * e^{-\lambda \mathrm{D}t}$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g(t) = g_n(t) = c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t}$

Solution générale

$$\boxed{u = u_n(x,t) = c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Afin de déterminer les c_n, on utilise la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$.
Comme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Il vient,

$$u(x,t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi(x)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{l}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \delta_{n,m} \\
&= \frac{l}{2} c_m
\end{aligned}$$

Donc $c_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$: il s'agit des coefficients de Fourier de φ.
La solution recherchée est donc :

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x\right] e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}$$

Conditions suffisantes

Si,
- φ est continue sur $[0,l]$
- φ' est continue par morceaux sur $[0,l]$
- $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)$ converge uniformément et absolument vers $\varphi(x)$ sur $[0,l]$.

Unicité

On multiplie les 2 membres l'équation de diffusion par u.

$$u\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t} = \mathrm{D}u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{D}\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{D}\left[\underbrace{[u\frac{\partial u}{\partial x}]_0^l}_{=0} - \int_0^l (\frac{\partial u}{\partial x})^2\,\mathrm{d}x\right] = -\mathrm{D}\int_0^l (\frac{\partial u}{\partial x})^2\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Donc on a une fonction décroissante :

$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,0)\,\mathrm{d}x$$

Soient $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ deux solutions du problème. Soit $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ alors v est solution de : $\dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ pour $0 < x < l,\ t > 0$
- $v(x=0,t) = 0,\ t > 0$

- $v(x = l, t) = 0,\ t > 0$
- $v(x, 0) = 0$ pour $0 < x < l$

Or on a : $\frac{1}{2}\int_0^l v^2(x,t)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^l v^2(x,0)\,\mathrm{d}x = 0$

Donc : $v = 0$ et $u_1 = u_2$.

Exemples

(a) $\varphi(x) = x(\pi - x)$

$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, avec $0 < x < \pi$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,pour $t > 0$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(x-\pi)\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = 4\frac{1-(-1)^n}{n^3\pi}$$

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin((2m-1)x)}{(2m-1)^3}e^{-(2m-1)^2\mathrm{D}t}$$

(b) $\varphi(x) = x$

Remarque

$\varphi(x) \neq 0$ pour $x = \pi$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{n}(-1)^n$$

$$u(x,t) = \textstyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{-2}{n}(-1)^n\right)\sin(nx)e^{-n^2\mathrm{D}t}$$

Remarque

Retour sur la diffusion sur tout $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Ici pas de CL donc pas de restrictions sur k.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\Big(a(k)\cos(kx) + b(k)\sin(kx)\Big)e^{-k^2\mathrm{D}t}$$

or $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\Big(a(k)\cos(kx) + b(k)\sin(kx)\Big)$

et $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}\hat{\varphi}(k)$ d'où $\begin{cases} a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{\varphi}(k) \\ b(k) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\hat{\varphi}(k)\end{cases}$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}e^{-k^2\mathrm{D}t} = \frac{1}{2\pi}\int d\xi\varphi(\xi)\int\int dk e^{ikx}e^{-ik\xi}e^{-k^2\mathrm{D}t}$$

or $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ik(\xi-x)}e^{-k^2\mathrm{D}t} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{D}t}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4\mathrm{D}t}}$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4\mathrm{D}t}} \quad t > 0$$

3.9 Solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz dans $\mathbb{R}^2$

$$\Delta + k^2 \quad (k \in \mathbb{R}^*)$$

Soit : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$(\Delta + k^2)f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) f(x_1,x_2,x_3) + k^2 f(x_1,x_2,x_3)$$

On cherche E tel que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$: $(\Delta + k^2)\mathrm{E} = \delta$

Rappel : $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0,0,0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

Remarque

$f = f(r)$ fonction radiale

$(\Delta + k^2)f = 0$

$\Delta f = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) + k^2 f(r) = 0$

On pose $g(r) = rf(r)$ donc g est solution de $g''(r) + k^2 g(r) = 0$.

Après calculs, on obtient : $f(r) = \mathrm{C}_1 \frac{\cos kr}{r} + \mathrm{C}_2 \frac{\sin kr}{r}$ avec $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathcal{C}$

Attention : $\frac{1}{r}$ et $\frac{\cos kr}{r}$ sont localement intégrables dans $\mathbb{R}^3$.

$$\langle \mathrm{C}_1 \frac{\cos kr}{r} + \mathrm{C}_2 \frac{\sin kr}{r}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} dx_1 dx_2 dx_3 \left(\mathrm{C}_1 \frac{\cos kr}{r} + \mathrm{C}_2 \frac{\sin kr}{r}\right) \varphi(x_1,x_2,x_3)$$

1) $(\Delta + k^2)\frac{\sin kr}{r}$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta + k^2)\frac{\sin kr}{r}, \varphi \rangle &= \langle \frac{\sin kr}{r}, (\Delta + k^2)\varphi \rangle \\ &= \int d^3x \frac{\sin kr}{r} (\Delta + k^2)\varphi(x_1,x_2,x_3) \\ &= \int \left((\Delta + k^2)\frac{\sin kr}{r}\right) \varphi(x_1,x_2,x_3) d^3x \\ &= 0 \end{aligned}$$

en effectuant des intégrations par parties et car $(\Delta + k^2)\frac{\sin kr}{r} = 0$ dans tout $\mathbb{R}^3$.

$$\longrightarrow (\Delta + k^2)\frac{\sin kr}{r} = \mathbb{O} \quad \text{avec} \quad \mathbb{O} \quad \text{la distribution nulle}$$

$2)(\Delta + k^2)\dfrac{\cos kr}{r}$

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta + k^2)\frac{\cos kr}{r}, \varphi\rangle &= \langle\frac{\cos kr}{r}, (\Delta + k^2)\varphi\rangle \\
&= \int d^3x \frac{\sin kr}{r}(\Delta + k^2)\varphi(x_1, x_2, x_3) \\
&\neq \int \left((\Delta + k^2)\frac{\sin kr}{r}\right)\varphi(x_1, x_2, x_3)d^3x
\end{aligned}$$

L'intégration par parties ne marche pas car les dérivées partielles secondes de $\dfrac{\cos kr}{r}$ ne sont pas localement sommables.

$$\begin{aligned}
\int d^3x \frac{\cos kr}{r}(\Delta + k^2)\varphi(x_1, x_2, x_3) &= \lim_{\varepsilon\to 0,\ r>\varepsilon} \int dx_1dx_2dx_3 \frac{\cos kr}{r}(\Delta + k^2)\varphi(x_1, x_2, x_3) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}_\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\mathrm{I}_\varepsilon = \int_{r>\varepsilon} d^3x \frac{\cos kr}{r}(\Delta + k^2)\varphi(x_1, x_2, x_3)$$

Rappel :

$$\int_{r>\varepsilon} d^3x \frac{\cos kr}{r}\Delta\varphi = \int_{r>\varepsilon} d^3x \Delta\left(\frac{\cos kr}{r}\right)\varphi + \int_{r=\varepsilon} \left(\frac{-\cos kr}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varphi\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\cos kr}{r})\right)d\sigma_\varepsilon$$

avec $d\sigma_\varepsilon = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi$.

Pour obtenir cette égalité, on a utilisé le théorème de Green.

$$\mathrm{I}_\varepsilon = \int_{r=\varepsilon} \left(\frac{-\cos kr}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)\right)d\sigma_\varepsilon$$

Soit $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) = -k\frac{\sin kr}{r} - \frac{\cos kr}{r}$$

$$\mathrm{I}_\varepsilon = -\varepsilon \cos k\varepsilon \int \frac{\partial\varphi}{\partial r}d\omega - k\varepsilon \sin k\varepsilon \int \varphi d\omega - \cos k\varepsilon \int \varphi d\omega$$

$\lim_{\varepsilon\to 0} = 0 + 0 + (-4\pi\varphi(0))$

$$(\Delta + k^2)\frac{\cos kr}{r} = -4\pi\delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

La solution fondamentale est donc : $\dfrac{-\cos kr}{4\pi r}$

Remarques :

- $(\Delta + k^2)\dfrac{-e^{\pm ikx}}{4\pi r} = \delta$
- $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right) = -4\pi\delta$
- $\Delta\left(\dfrac{-1}{4\pi r}\right) = \delta$

3.10 Espace fonctionnel

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$
$\mathrm{L}^2(a, b)$ est l'ensemble des fonctions de carré sommable sur $[a, b]$.

$$\int_{[a,b]} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty$$

Remarque

- Pour la construction de $\mathrm{L}^2(a, b)$, deux fonctions égales presque partout sur $[a; b]$ sont considérées comme identiques.
- $\mathrm{L}^2(a, b)$ est un espace vectoriel de dimension ∞.

On peut munir $\mathrm{L}^2(a, b)$ de la norme suivante :

$$||f||_{\mathrm{L}^2(a,b)} = (\int_{[a,b]} |f(x)|^2 d\mu(x))^{\frac{1}{2}}$$

Proposition

L'espace $\mathrm{L}^2(a, b)$ *muni de la norme ci-dessus est un espace de Banach (Toute suite de Cauchy converge vers un élément de cet espace vectoriel). L'espace vectoriel* $\mathrm{L}^2(a, b)$ *normé est complet.*

La norme ci-dessus dérive du produit scalaire :

$$(f, g)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \int_{[a,b]} f(x)g(\bar{x})d\mu(x)$$

Proposition

$\mathrm{L}^2(a, b)$ *est un espace de Hilbert.*

Définition

Soit $f_1, f_2, .. \in \mathrm{L}^2(a,b)$ *On dit que cette suite de fonctions converge en moyenne quadratique vers un élément* $f \in \mathrm{L}^2(a,b)$ *si :*

$$\lim_{n \to \infty} ||f_n - f||_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$$

Proposition

Soit $\phi_1, \phi_2, ... \in \mathrm{L}^2(a,b)$ *tel que :*

1. $(\phi_n, \phi_m)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$ *si* $n \neq m$.
2. *La seule fonction* $g \in \mathrm{L}^2(a,b)$ *telle que* $(g, \phi_n)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$ $\forall n = 1, 2, ...$ *est la fonction nulle.*

Alors l'ensemble $\phi_1, \phi_2, ...$ *forme une base orthogonale de* $\mathrm{L}^2(a,b)$.

Exemple

Les fonctions $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$, ... forment une base orthogonale de $\mathrm{L}^2(0,l)$.

Proposition

$f \in \mathrm{L}^2(a,b)$, *soit* $\phi_1, \phi_2, ...$ *une base orthogonale de* $\mathrm{L}^2(a,b)$. *Les coefficients de fourier de* f *sont :*

$$\mathrm{C}_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}$$

On montre que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{C}_n(f)\phi_n$ *converge en moyenne quadratique vers* f *:*

$$\lim_{p \to +\infty} \left|\left| \sum_{n=1}^{p} \mathrm{C}_n(f)\phi_n - f \right|\right|_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$$

Remarque

La proposition ne dit pas que la somme converge simplement vers la fonction f, il se peut que :

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \mathrm{C}_n(f)\phi_n(x) \right) \neq f(x)$$