

Décomposition spectrale pour le son musical

Unité d'ouverture "Science et Musique"

Université Paris VI - L2 - 2010/2011

Laurent Mazliak

15 février 2011

Chapitre 1

Théorie de Fourier élémentaire

Un des outils fondamentaux développés pour l'analyse des phénomènes vibratoires est la décomposition spectrale. Elle consiste en la décomposition des fonctions sur une base composée de fonctions aléatoires élémentaires (en général des exponentielles complexes).

Il existe de multiples cadres qu'on peut donner à cette décomposition suivant les exigences plus ou moins grandes qu'on est prêt à mettre sur la fonction à décomposer. Dans cette partie, et comme première approche, nous allons nous intéresser principalement au cas le plus simple, celui des séries de Fourier où la fonction que l'on décompose est périodique. C'est naturellement le cas pour les modèles les plus simples d'onde sonore dont la fréquence est considérée comme constante.

Cette partie est divisé en deux parties. La première introduira les notions mathématiques associées à la théorie de Fourier. Elle est à la fois assez technique et relativement simple, en tout cas quant aux résultats qu'il faut connaître. Dans la deuxième partie, nous nous pencherons plus spécifiquement sur l'application de la théorie de Fourier au phénomène du son ce qui nous permettra de mettre en place le cadre classique de l'étude des sons.

Mais avant tout, quelques mots sur l'homme étonnant que fut Fourier.

1.1 Jean Baptiste Joseph Fourier



Né le 21 mars 1768 à Auxerre, Fourier était le neuvième des douze enfants du second mariage d'un père tailleur. Orphelin à 10 ans, il est accueilli par le maître de chant de la Cathédrale d'Auxerre dans une institution scolaire qu'il dirigeait, et montre très tôt un énorme intérêt (et un immense talent...) pour les mathématiques. En 1787, décidé à devenir prêtre, Fourier entre au

séminaire de l'Abbaye de Saint-Benoît-sur-Loire. En 1789, il abandonne Saint-Benoît et devient en 1790 professeur à l'Ecole Royale Militaire d'Auxerre. Il est alors passionné par la politique, qui va devenir l'autre grande occupation de sa vie, et devient en 1793 un membre du Comité local révolutionnaire. Au moment de la Terreur, il essaya prudemment de se retirer du jeu mais ne put y arriver tant il était impliqué dans les luttes entre factions rivales. Arrêté en 1794, il ne dû sa survie qu'à la chute de Robespierre.

En 1794, on lui propose d'entrer à la toute nouvelle Ecole Normale de Paris, où il suit les cours de Lagrange, de Laplace et de Monge. Il est ensuite nommé professeur à l'Ecole Polytechnique.

En 1798, il se joint à l'armée de Bonaparte parmi les multiples savants qui accompagnent l'expédition d'Egypte. Fourier fut quelques mois administrateur en Egypte et en profita pour mettre au point des campagnes de fouilles archéologiques et fonder l'Institut du Caire. Après la désastreuse conclusion de l'aventure de Bonaparte en Egypte, Fourier réussit à rentrer en France en 1801 et retrouve son poste de professeur d'Analyse à l'Ecole Polytechnique. Entre temps, Bonaparte, devenu Premier Consul, s'est emparé du pouvoir et décide d'envoyer Fourier prendre la place nouvellement vacante de Préfet de l'Isère.

C'est durant son séjour grenoblois que Fourier mène ses expériences fondamentales sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, au sujet de laquelle il envoie en 1807 un mémoire à l'Académie des Sciences où il introduit notamment les développements en séries trigonométriques. Il faut croire que Fourier était un peu trop en avance sur son temps car l'Académie, par la voix de Laplace, Lagrange, Monge et Lacroix réserva alors un accueil mitigé à ce travail. Néanmoins, quand en 1811, l'Académie des Sciences proposa de récompenser un travail sur la propagation de la chaleur, ce fut Fourier qui eut le prix.

A la chute de l'Empire, Fourier essaya prudemment d'adopter une position de neutralité, mais fut rattrapé de nouveau par les événements. Quand Napoléon s'évada de l'île d'Elbe, il essaya cependant de persuader la population grenobloise de s'opposer à son retour et de proclamer sa loyauté à Louis XVIII. Quand Napoléon arriva à Grenoble, Fourier avait pris le large. L'Empereur ne lui en voulut malgré tout pas trop puisqu'il le nomma Préfet du Rhône, d'où Waterloo le délogea...

Fourier revint alors à Paris. Il fut élu en 1817 à l'Académie des Sciences, dont il devint secrétaire. C'est seulement à ce moment, en 1822, que fut publié son mémoire sur la théorie de la chaleur qui allait avoir une énorme influence sur les mathématiques du XIXème siècle. Il mourut à Paris le 16 mai 1830.

1.2 Relations et polynômes trigonométriques

Nous allons maintenant commencer l'étude de la décomposition spectrale par des constats simples sur les fonctions circulaires.

Proposition 1.2.1 *a) Si m et p sont deux entiers distincts de \mathbb{N} on a*

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \cos(p\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \sin(p\theta) d\theta = 0$$

b) Si m et p sont deux entiers naturels,

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \sin(p\theta) d\theta = 0$$

Démonstration :

On a

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases}$$

Donc, si $n \neq p$,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(n+p)t} dt = 0 \quad (1.1)$$

Alors, en prenant les parties réelles, on obtient

$$0 = \int_0^{2\pi} (\cos nt \cos pt + \sin nt \sin pt) dt$$

et

$$0 = \int_0^{2\pi} (\cos nt \cos pt - \sin nt \sin pt) dt.$$

D'où (somme et différence),

$$\int_0^{2\pi} \cos nt \cos pt dt = 0 = \int_0^{2\pi} \sin nt \sin pt dt.$$

En regardant la partie imaginaire de (1.1), on obtient la relation du b). \square

Ces simples remarques vont nous donner une piste d'exploration pour la décomposition cherchée.

Soit en effet

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\theta)$$

un *polynôme trigonométrique*, les a_k et b_k étant donc des constantes réelles fixées (le fait de prendre comme terme constant $\frac{a_0}{2}$, étrange à première vue, s'expliquera dans la suite). On se pose la question suivante : comment, à partir de la connaissance de F , est-il possible de retrouver la valeur des (a_k) et des (b_k) ?

D'après la Proposition précédente, on a, pour tout entier $1 \leq m \leq n$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\theta) \cos(m\theta) d\theta &= \\ \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) d\theta + \sum_{k=1}^n a_k \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \cos(m\theta) d\theta + \sum_{k=1}^n b_k \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) \cos(m\theta) d\theta &= \\ a_m \int_0^{2\pi} \cos(m\theta)^2 d\theta \end{aligned}$$

Si $m \geq 1$, $\cos^2(m\theta) = \frac{1}{2}[-\cos(2m\theta) + 1]$ et donc

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2m} [\sin(2m\theta)]_0^{2\pi} + 2\pi \right) = \pi.$$

On a donc

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) F(\theta) d\theta$$

De même, $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta$ et donc

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta.$$

On vérifie de la même façon que pour tout $1 \leq m \leq n$,

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin(m\theta) d\theta.$$

Naturellement, on constate que les expressions précédentes ont un sens non seulement quand F est un polynôme trigonométrique mais bien plus largement dès que la fonction F est suffisamment régulière pour qu'on puisse définir les intégrales. Typiquement, et c'est le cas où nous nous limiterons ici, on peut prendre F continue par morceaux. Pour simplifier l'exposé, nous allons étudier le cas des fonctions continues; nous énoncerons ensuite sans démonstration un prolongement au cas où la fonction n'est que continue par morceaux (qui sera le cas important dans la pratique). Il ne réclame en fait que quelques petits ajustements techniques et le lecteur intéressé est invité à se reporter à l'un des innombrables livres qui traitent en détail de la théorie des séries de Fourier.

1.3 Coefficients de Fourier

Soit F une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (on pourrait la prendre d'ailleurs sans problème à valeurs dans \mathcal{C}), 2π -périodique.

On a alors

Définition 1.3.1 Pour tout $m \geq 0$, on pose

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

et pour tout $m \geq 1$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin(m\theta) d\theta.$$

Les coefficients $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ s'appellent les coefficients de Fourier de la fonction F . La série de Fourier formelle de F est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\theta) d\theta.$$

Remarques : (i) On a donc vu dans la partie précédente que si F est un polynôme trigonométrique, F coïncide avec sa série de Fourier.

(ii) Il faut bien comprendre que l'expression de la série de Fourier formelle ne préjuge en rien de la convergence de la série en question. Il s'agit véritablement d'une expression formelle et les

problèmes de convergence forment d'ailleurs l'essentiel du travail que nous allons fournir par la suite.

La forme intégrale des coefficients de Fourier leur donne une série de propriétés que nous évoquons maintenant.

Proposition 1.3.2 *Soit F une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue et 2π -périodique. On note (a_k) et (b_k) ses coefficients de Fourier.*

a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(\theta) \cos(k\theta) d\theta$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta.$$

b) Si F est une fonction paire, on a $b_k = 0, \forall k \geq 1$. Si F est une fonction impaire, on a $a_k = 0, \forall k \geq 0$.

Démonstration : a) Cela résulte de la 2π -périodicité des fonctions $\theta \mapsto F(\theta) \cos(k\theta)$ et $\theta \mapsto F(\theta) \sin(k\theta)$.

b) Si F est paire, on a $\theta \mapsto F(\theta) \sin(k\theta)$ impaire. Or

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta + \int_{-\pi}^0 F(\theta) \sin(k\theta) d\theta \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta - \int_0^{\pi} F(u) \sin(ku) du \right) = 0 \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $u = -\theta$ et utilisé $F(-u) \sin(-ku) = F(u) \sin(ku)$.

La propriété pour F impaire se démontre de même. \square

Une autre propriété importante concerne la convergence des coefficients de Fourier. Sa preuve nécessite un lemme.

Lemme 1.3.3 *Soit $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier \tilde{F} sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b], |F(x) - \tilde{F}(x)| < \varepsilon$.*

Démonstration : F est continue sur $[a, b]$. Elle y est donc uniformément continue (théorème de Heine-Borel) : il existe un $\alpha > 0$ tel que, si $|x - y| < \alpha, |F(x) - F(y)| < \varepsilon$. Choisissons n tel que $\frac{b-a}{n} < \alpha$ et posons

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, 0 \leq k \leq n.$$

Soit alors la fonction $\tilde{F}(x) = F(x_k)$ pour $x \in [x_k, x_{k+1}[$. C'est naturellement une fonction en escalier. De plus, si $x \in [a, b]$, il existe k tel que $x_k \leq x < x_{k+1}$. Comme $|x_{k+1} - x_k| = \frac{b-a}{n} < \alpha$. On a $|x - x_k| < \alpha$ et donc $|F(x) - F(x_k)| < \varepsilon$. \square

On peut alors énoncer

Proposition 1.3.4 (Lemme de Riemann-Lebesgue) *Si F est continue sur $[a, b]$,*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^b F(\theta) \cos(r\theta) d\theta = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^b F(\theta) \sin(r\theta) d\theta = 0.$$

Démonstration : Commençons par supposer que F est une fonction \tilde{F} en escalier $\tilde{F}(\theta) = \beta_k$ si $x_k \leq \theta < x_{k+1}$ avec $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi$.

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\theta) \cos(r\theta) d\theta &= \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos(r\theta) d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{r} [\sin(rx_{k+1}) - \sin(rx_k)]. \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\theta) \cos(r\theta) d\theta \right| \leq \frac{2}{r} \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k|$$

et $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\theta) \cos(r\theta) d\theta \right| = 0$.

Soit maintenant F continue sur $[a, b]$ quelconque. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme précédent, il existe \tilde{F} en escalier telle que $\forall x \in [0, 2\pi], |F(x) - \tilde{F}(x)| < \varepsilon$. Alors,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} F(\theta) \cos(r\theta) d\theta \right| &\leq \int_0^{2\pi} |F(\theta) - \tilde{F}(\theta)| |\cos(r\theta)| d\theta + \left| \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\theta) \cos(r\theta) d\theta \right| \\ &\leq 2\pi\varepsilon + \left| \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\theta) \cos(r\theta) d\theta \right|. \end{aligned}$$

Comme le deuxième terme tend vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$ puisque \tilde{F} est en escalier, on peut le rendre inférieur à ε pour r assez grand, d'où le résultat. \square

On a alors immédiatement le :

Corollaire 1.3.5 Pour toute fonction F continue sur $[a, b]$ de coefficients de Fourier (a_k) et (b_k) , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0.$$

Notons que ceci montre que la série de Fourier formelle de F est candidate à converger. Nous allons maintenant nous pencher sur ce problème de convergence.

1.4 Convergence d'une série de Fourier. Théorème de Dirichlet

Enonçons de suite le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 1.4.1 (Dirichlet) Soit F une fonction continue 2π -périodique et dérivable à droite et à gauche en tout point de \mathbb{R} .

Alors la série de Fourier formelle de F converge en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$ et

$$F(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt_0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt_0).$$

Démonstration : Fixons $t_0 \in [0, 2\pi]$. Notons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikt} &= \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i\frac{t}{2}}(e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i\frac{t}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}}2i \sin(\frac{t}{2})} = \\ &= \frac{i e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{2 \sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2})} (\sin(n + \frac{1}{2})t + \sin \frac{t}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (1.2)$$

et

$$\sum_{k=1}^n \sin(kt) = -\frac{\sin(\frac{t}{2}) + \sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

En particulier, on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t - t_0)}{\sin \frac{t - t_0}{2}} dt = 2\pi$$

et

$$F(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} F(t) dt.$$

De ce fait,

$$\begin{aligned} F(t_0) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt_0) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kt_0) \right] &= \\ F(t_0) - \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sum_{k=1}^n \cos(kt_0) \cos(k\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sum_{k=1}^n \sin(kt_0) \sin(k\theta) d\theta \right) &= \\ F(t_0) - \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sum_{k=1}^n \cos k(t_0 - \theta) d\theta \right) &= \\ F(t_0) - \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sum_{k=0}^n \cos k(t_0 - \theta) d\theta \right) &= \\ F(t_0) - \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_0 - \theta)}{2 \sin \frac{t_0 - \theta}{2}} \right) d\theta \right) &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_0 - \theta)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_0 - \theta)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} [-F(\theta) + F(t_0)] d\theta &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \sin(n + \frac{1}{2})(t_0 - \theta) \frac{F(t_0) - F(\theta)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{2\pi} \sin(n + \frac{1}{2})(t_0 - \theta) \frac{F(t_0) - F(\theta)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{F(t_0) - F(\theta)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} = \frac{F(t_0) - F(\theta)}{t_0 - \theta} \cdot \frac{t_0 - \theta}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}}$$

et il s'agit donc sur les intervalles $[0, t_0]$ et $[t_0, 2\pi]$ d'une fonction continue en vertu des hypothèses de dérivabilité à droite et à gauche en t_0 . Par conséquent, en utilisant le Lemme de Riemann-Lebesgue, on obtient que les deux intégrales précédentes tendent vers 0. \square

Comme annoncé plus haut, on peut, au prix d'un petit effort technique, généraliser le résultat précédent aux fonctions continues par morceaux. Introduisons d'abord une définition.

Définition 1.4.2 Soit F une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} , admettant en tout point des limites à droite et à gauche (F n'a que des discontinuités de première espèce). On appelle régularisée de F la fonction \bar{F} définie par

$$\bar{F}(t) = \frac{F(t+) + F(t-)}{2}.$$

Lemme 1.4.3 On a pour tout $0 < \varepsilon < 2\pi$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin u} du = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin u} du = \frac{1}{2}$$

Preuve : On a d'après (1.2)

$$\int_0^\pi \sum_{k=0}^n \cos kt dt = \pi = \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin u} du$$

$$\text{donc } \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Par le lemme de Riemann-Lebesgue, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin u} du = 0.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin u} du = \frac{1}{2}.$$

La démonstration est la même pour l'autre intégrale. \square

On a alors

Théorème 1.4.4 Si F continue par morceaux et 2π -périodique, admet en tout point des limites à droite et à gauche et est telle que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, les fonctions

$$h \mapsto \frac{F(t_0 + h) - F(t_0^+)}{h}$$

et

$$h \mapsto \frac{F(t_0 - h) - F(t_0^-)}{h}$$

soient bornées, alors la série de Fourier formelle de F converge en tout t_0 vers $\overline{F}(t_0)$.

Preuve : Reprenant la démonstration du théorème 1.4.1, on a, en posant

$$S_n(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt_0 + b_k \sin(kt_0),$$

$$\begin{aligned} 2S_n(t_0) - F(t_0+) - F(t_0-) &= [S_n(t_0) - F(t_0+)] + [S_n(t_0) - F(t_0-)] = \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_0 - \theta) \frac{F(\theta) - F(t_0+)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta &+ \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{2\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_0 - \theta) \frac{F(\theta) - F(t_0+)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta + \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_0 - \theta) \frac{F(\theta) - F(t_0-)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta &+ \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{2\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_0 - \theta) \frac{F(\theta) - F(t_0-)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta = \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_0 - \theta) \frac{F(\theta) - F(t_0-)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta &+ \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{2\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_0 - \theta) \frac{F(\theta) - F(t_0+)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta + \\ \frac{1}{2\pi} [F(t_0+) - F(t_0-)] \left(\int_0^{t_0} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_0 - \theta)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta &- \int_{t_0}^{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_0 - \theta)}{\sin \frac{t_0 - \theta}{2}} d\theta \right). \end{aligned}$$

Les hypothèses sur F et le lemme de Riemann-Lebesgue impliquent que les deux premières intégrales tendent vers 0 avec n . Pour la troisième expression, sa convergence résulte du Lemme 1.4.3. \square

1.5 Exemples : exercices et prolongements

Exercice 1.5.1

Dans les cinq cas suivants, trouver l'expression de la série de Fourier formelle de la fonction f après en avoir tracé rapidement le graphe. Etudier la convergence

a) $f(\theta) = |\sin(\theta)|$

b) $f(\theta)$, 2π -périodique, $f(0) = f(2\pi) = 0$ et

$$f(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi.$$

c) f 2π -périodique,

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \theta - \frac{3\pi}{2}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

d) $f(\theta) = \theta^2$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, 2π -périodique. Dédurre $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

e) $f(\theta) = e^\theta$, $-\pi \leq \theta < \pi$, 2π -périodique.

Comme on l'a vu, le théorème de Dirichlet exige un contrôle assez strict des taux d'accroissement au voisinage de t_0 pour obtenir la convergence de la série de Fourier formelle en t_0 . On peut en fait supprimer cette hypothèse au prix d'un type de convergence plus faible.

Théorème 1.5.1 (Fejer) Soit f une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} , 2π -périodique. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0+)$ et $f(t_0-)$ existent. On note (a_n) et (b_n) les coefficients de Fourier de f et on pose

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k (a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)) \right].$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(t_0) = \bar{f}(t_0)$$

(où \bar{f} est, comme précédemment, la régularisée de f).

La démonstration est proposée dans l'exercice suivant.

Exercice 1.5.2

Soit f une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} , 2π périodique. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On note $f(t_0+)$ la limite à droite, $f(t_0-)$ la limite à gauche de f en t_0 , et (a_n) et (b_n) la suite des coefficients de Fourier de f . Enfin, on pose

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt) \right].$$

a) Montrer que

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{\sin(k + \frac{1}{2})(t - \theta)}{2 \sin \frac{t-\theta}{2}} d\theta \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n \int_0^{2\pi} f(t-u) \frac{\sin(k + \frac{1}{2})(u)}{2 \sin \frac{u}{2}} du \end{aligned}$$

b) Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \sin(k + \frac{1}{2})u = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}.$$

c) Montrer que

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^\pi [f(u+t) + f(t-u)] \frac{\sin^2 \frac{(n+1)u}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du$$

En particulier,

$$1 = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{(n+1)u}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du$$

Déduire

$$\left| \sigma_n(t_0) - \frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2} \right| \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^\pi |f(t_0+u) + f(t_0-u) - f(t_0+) - f(t_0-)| \frac{\sin^2 \frac{(n+1)u}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} du$$

d) Conclure $\sigma_n(t_0) \rightarrow \frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2}$.

1.6 Phénomène de Gibbs

Une façon naturelle de voir les théorèmes de convergence de la série de Fourier de f est de dire que les sommes partielles de la série fournissent des approximations de la fonction f . Une telle approximation est particulièrement bonne quand elle est uniforme : rappelons qu'on dit que f_n converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall t \in [0, 2\pi], |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Le problème avec les séries de Fourier de fonctions discontinues est que l'approximation n'est pas uniforme et ce phénomène explique des perturbations dans les techniques qui exploitent la décomposition spectrale pour reconstituer le son.

Illustrons ceci sur un exemple précédemment vu en exercice $\phi(\theta)$, 2π -périodique, $\phi(0) = \phi(2\pi) = 0$ et

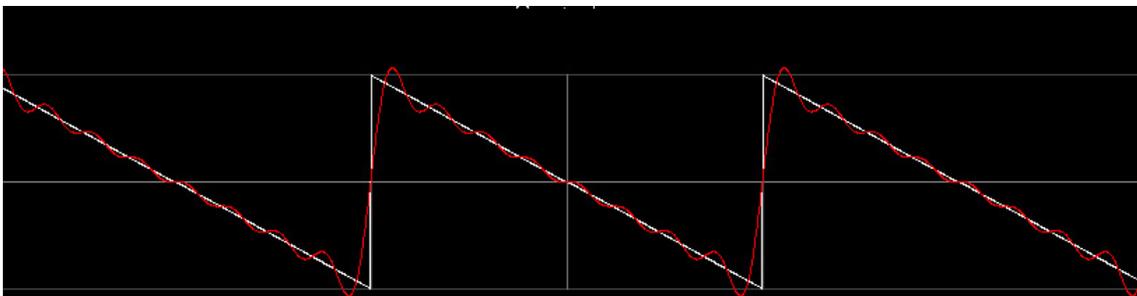
$$\phi(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi.$$

f est ce qu'on appelle une fonction en dents de scie et nous verrons qu'elle représente grossièrement la forme d'onde d'un instrument à cordes frottées.

On a vu que la série de Fourier formelle de cette fonction est donnée par

$$\phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}.$$

Posons $\phi_m(\theta) = \sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\theta)}{n}$, la m -ième somme partielle. La courbe représentative de $\phi_m(\theta)$ a l'allure suivante (en rouge)



qui fait nettement apparaître au voisinage de la discontinuité un dépassement de la valeur $\frac{\pi}{2}$.

Calculons ce dépassement : il s'agit du premier maximum local de ϕ_m . On a

$$\begin{aligned}\phi'_m(\theta) &= \sum_{n=1}^m \cos(n\theta) = \frac{\sin(m + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin(\frac{\theta}{2})} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sin(\frac{1}{2}m\theta) \cos \frac{1}{2}(m + 1)\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}.\end{aligned}$$

Le premier maximum se produit donc à $\frac{\pi}{m+1}$ et sa valeur est donnée par

$$\phi_m\left(\frac{\pi}{m+1}\right) = \frac{\pi}{m+1} \sum_{n=1}^m \frac{\sin \frac{n\pi}{m+1}}{\frac{n\pi}{m+1}}.$$

On reconnaît là une somme de Riemann qui converge donc vers l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$ qui numériquement, vaut environ 1,85, soit un dépassement d'environ 0,28 par rapport à $\frac{\pi}{2}$ qui représente donc 9% de la taille du saut à la discontinuité (qui est π).

Chapitre 2

Applications au son et extensions

Nous allons maintenant chercher à illustrer les notions précédemment introduites.

2.1 Illustration visuelle de la décomposition spectrale

Nous allons tout d'abord regarder graphiquement la façon dont la décomposition de Fourier approche la fonction limite dans des cas élémentaires (onde carrée, dents de scie, onde triangulaire). Cela va se faire à travers l'applet Fourier qui est mise en ligne sur la page du cours.

Avant d'utiliser cet outil, commençons par une petite remarque technique. Nous avons montré que dans des cas *raisonnables* une fonction 2π -périodique f se décompose sous la forme

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$$

où (a_k) et (b_k) sont données par des formules intégrales.

Remarquons que pour $k \geq 1$,

$$a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos(k\theta) + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin(k\theta) \right).$$

Comme $\left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}\right)^2 + \left(\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}\right)^2 = 1$, il existe $\varphi_k \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \sin \varphi_k$ et $\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \cos \varphi_k$. Posant alors $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ (avec $c_0 = a_0$), on a

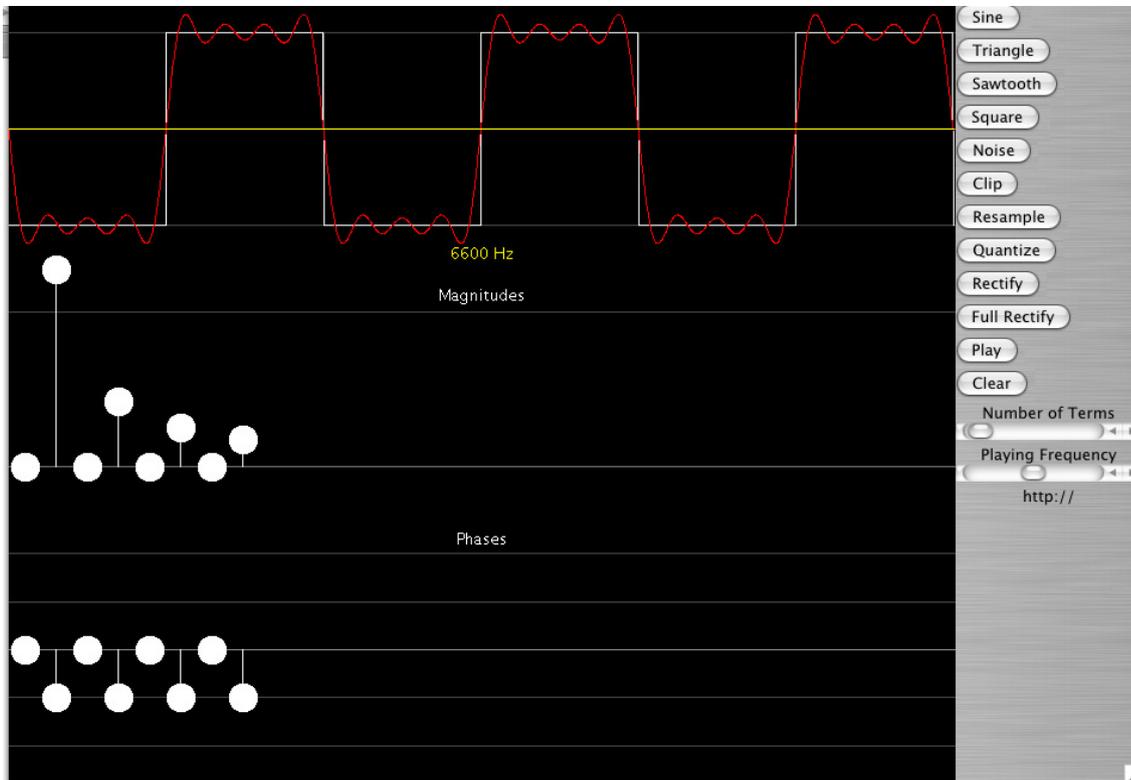
$$a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) = c_k (\sin \varphi_k \cos(k\theta) + \cos \varphi_k \sin(k\theta)) = c_k \sin(k\theta - \varphi_k)$$

et donc

$$f(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\theta - \varphi_k).$$

L'applet Fourier, pour chacune des fonctions sélectionnables à droite, calcule les c_k et les φ_k associés et permet de sélectionner le nombre de termes souhaités dans la somme partielle $\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k \sin(k\theta - \varphi_k)$ dont le graphe apparaît en rouge.

Prenons par exemple une onde carrée (*Square*) avec une approximation avec $n = 7$ (il y a donc 8 termes). On obtient :



Comme signalé plus haut, on peut observer le phénomène de Gibbs au voisinage de la discontinuité. Par ailleurs, pour une fonction créneau paire (c'est à dire typiquement f paire, $f(\theta) = 0$ si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $f(\theta) = 1$ si $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$), on calcule facilement $b_k = 0$ (fonction paire) et $a_k = -\frac{2}{k\pi} \sin(k\frac{\pi}{2})$, ce qui fait que les coefficients c_{2k} sont tous nuls, ce qu'on voit bien sur la fenêtre de l'applet.

2.2 Illustration sonore

Pour rentrer maintenant dans le domaines des ondes sonores, quelques remarques préliminaires. Le son est un phénomène vibratoire mais naturellement en général il ne garde pas une fréquence constante. Néanmoins le fonctionnement de l'oreille impose que pendant un temps court mais mesurable, l'onde soit quasiment périodique pour pouvoir être repérée (voir cours sur l'oreille). En deux mots, on peut dire que l'organe qui analyse la vibration mécanique du tympan et la transforme en signal électrique envoyé au cerveau s'appelle la cochlée qui est en forme de limaçon. Elle est un véritable outil de décomposition spectrale au sens où deux sons purs de fréquence différentes vont faire vibrer deux lieux distincts de la cochlée.

Pour simplifier nous allons donc nous intéresser à des sons de fréquence constante ν . Il est

à noter qu'un son émis par un instrument (contrairement à celui émis par le téléphone par exemple !) est en général très complexe, et la forme d'onde de la vibration très torturée. C'est là que la décomposition spectrale prend tout son intérêt pour la décomposer en sons plus simples (typiquement une somme de sons purs sinusoïdaux). Il faut ici faire une remarque technique. Si une fonction d'onde f est de fréquence ν , comment se décompose-t-elle en série de Fourier ? On remarque simplement que $F(\theta) = f\left(\frac{\theta}{2\pi\nu}\right)$ est 2π -périodique et donc sa série de Fourier est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

avec $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \cos(k\theta) d\theta$ et $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin(k\theta) d\theta$. Alors

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\theta}{2\pi\nu}\right) \cos(k\theta) d\theta = 2\nu \int_0^{\frac{1}{\nu}} f(u) \cos(2\pi k\nu u) du$$

et de même

$$b_k = 2\nu \int_0^{\frac{1}{\nu}} f(u) \sin(2\pi k\nu u) du.$$

De ce fait,

$$\begin{aligned} f(u) &\approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2k\pi\nu u) + b_k \sin(2k\pi\nu u)) \\ &\approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(2k\pi\nu u - \varphi_k) \end{aligned}$$

avec les notations précédemment introduites.

Quand $c_k \neq 0$, dans le son représenté par la fonction d'onde f est donc présent le son pur $\sin(2k\pi\nu u - \varphi_k)$, de fréquence $k\nu$. C'est une harmonique du son f . c_k joue le rôle d'une intensité.

L'applet Fourier mentionné dans la section précédente a une interface sonore (accessible par le bouton *Play*) qui permet d'entendre la façon dont on se rapproche du son qu'on décompose en ajoutant une par une des harmoniques. Si on prend l'onde carrée, qui très grossièrement ressemble à la forme d'onde de la clarinette, la "convergence" vers le son de cet instrument est raisonnablement illustrée.

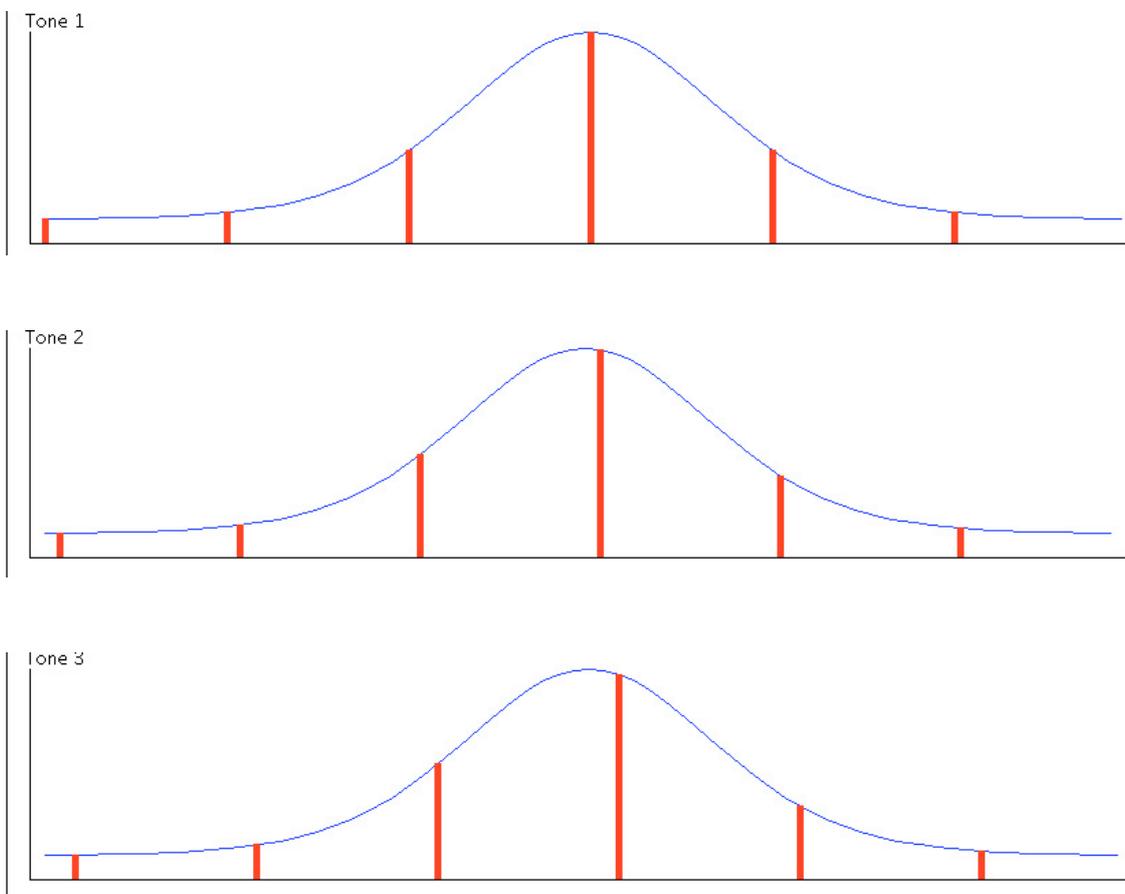
2.3 Illusions acoustiques

On a vu que les coefficients de Fourier d'une fonction périodique tendent vers 0 à l'infini. De ce fait pour un son réel les harmoniques de degré supérieur ont tendance à être de plus en plus atténuées. Une construction artificielle par ordinateur peut modifier ce type de comportement et peut ainsi permettre de construire des décompositions spectrales qui évoluent d'une façon différente. Nous allons regarder ici un exemple célèbre appelé son de Shepard : il est téléchargeable sur le site du cours.

Proposé en 1964 par Shepard lors d'une étude psychoacoustique, ce son joue sur une illusion qui fait que l'oreille ne distingue pas très facilement deux sons séparés par une octave. Le son

de Shepard fait se succéder les douze degrés de la gamme chromatique traditionnelle (Do, Do#, Ré, Ré#, etc.) mais chacun de ces sons contient un certain nombre d'harmoniques supérieures à l'octave (de fréquence $2^k\nu$ si ν est la fréquence du son) avec des intensités dont la répartition évolue de telle sorte qu'au bout du douzième degré on se retrouve au point de départ alors que l'oreille a l'impression qu'on n'a pas cessé de monter en fréquence. D'où pendant quelques instants l'impression qu'on a affaire à un son qui monte en permanence ; l'oreille ensuite repère la boucle et l'illusion est cassée.

L'applet Shepard illustre sommairement ce mécanisme. Voici par exemple la répartition des partiels d'octave des trois premiers sons



La fréquence du son d'intensité maximale augmente mais avec une intensité qui diminue alors que l'intensité des octaves inférieures augmentant, ceux-ci prennent de l'importance au point de devenir prédominants au bout d'un moment ; mais l'oreille entraînée dans le mouvement ascensionnel des fréquences met un certain temps avant de repérer que le son d'intensité maximale est en fait à l'octave inférieure.

2.4 Transformée de Fourier

La décomposition en série de Fourier utilise de façon fondamentale le fait que la fonction f qu'on cherche à représenter est périodique. Que peut-on faire quand cette propriété n'est pas réalisée, comme c'est le cas pour un son réel, ne serait-ce que parce qu'un tel son a nécessairement un début et une fin. La réponse est donnée par une extension de la méthode de Fourier où on définit ce qu'on appelle la transformée de Fourier.

Commençons par une définition.

Définition 2.4.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

Noter bien sûr que l'hypothèse sur f garantit l'existence de cette intégrale : puisque

$$|f(t)e^{-2i\pi\nu t}| = |f(t)|,$$

l'intégrale définissant \hat{f} est absolument convergente.

Le calcul effectif de \hat{f} est en général difficile.

Regardons un exemple célèbre : soit $f(t) = e^{-\pi t^2}$. Alors $\hat{f}(\nu) = e^{-\pi\nu^2} = f(\nu)$. En effet,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t^2+2i\nu t)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi((t+i\nu)^2+\nu^2)} dt. \end{aligned}$$

Posant $x = t + i\nu$, un raisonnement classique et élémentaire avec l'intégrale complexe (formule des résidus) amène $dx = dt$, $\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x^2+\nu^2)} dx$: en particulier $\hat{f}(\nu) \in \mathbb{R}^+$. Donc,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x^2+\nu^2)} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(y^2+\nu^2)} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi((x^2+y^2)+2\nu^2)} dx dy \end{aligned}$$

où la justification de l'utilisation du Théorème de Fubini est laissée en exercice. Passant en coordonnées polaires,

$$\hat{f}(\nu)^2 = \int_0^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\pi(r^2+2\nu^2)} = e^{-2\pi\nu^2} \int_0^{+\infty} 2\pi e^{-r^2\pi} dr = e^{-2\pi\nu^2}.$$

Donc $\hat{f}(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$. \square

De la même façon que la connaissance de la série de Fourier est équivalente à connaître la fonction quand le théorème de Dirichlet s'applique, quand f est suffisamment régulière on peut la retrouver à partir de \hat{f} .

Théorème 2.4.2 (Inversion de la transformée de Fourier)

Soit f de classe C^1 telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)| dt < +\infty$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Soit $A > 0$. Formons, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu &= \int_{-A}^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi\nu u} du \right) e^{2i\pi\nu t} d\nu = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) \int_{-A}^A e^{2i\pi\nu(t-u)} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) \left[\frac{e^{2i\pi\nu(t-u)}}{2i\pi(t-u)} \right]_{-A}^A = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) \frac{\sin(2\pi A(t-u))}{\pi(t-u)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dv f(t-v) \frac{\sin(2\pi Av)}{\pi v} \end{aligned}$$

où la justification de l'application du théorème de Fubini est laissée au lecteur.

Soit alors $\varepsilon > 0$ donné. On sépare l'intégrale précédente en trois morceaux $\int_{-\infty}^{-\varepsilon}, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}, \int_{\varepsilon}^{+\infty}$.

Par le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dv \frac{f(t-v) - f(t)}{v} \sin(2\pi Av).$$

Par ailleurs,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dv \frac{\sin(2\pi Av)}{v} = \int_{-2\pi A\varepsilon}^{2\pi A\varepsilon} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$$

donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dv \frac{\sin(2\pi Av)}{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta = \pi$$

et donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{f(t)}{v} \sin(2\pi Av) dv = \pi f(t).$$

Or,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dv f(t-v) \frac{\sin(2\pi Av)}{\pi v} = \\ &= [-f(t-v) \frac{1}{\pi v} \frac{1}{2\pi A} \cos(2\pi Av)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dv \frac{-f'(t-v)v - f(t-v)}{v^2} \frac{1}{2\pi A} \cos(2\pi Av) dv. \end{aligned}$$

Notons que f est bornée sur \mathbb{R} puisque $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ et donc $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)| dt = M$. On a alors

$$\left| \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dv f(t-v) \frac{\sin(2\pi Av)}{\pi v} \right| \leq \frac{M}{2\pi^2 \varepsilon A} + \frac{1}{2\pi^2 A} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} |f'(t-v)| dv + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} |f(t-v)| dv \right)$$

et donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dv f(t-v) \frac{\sin(2\pi Av)}{\pi v} = 0$. De même, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} dv f(t-v) \frac{\sin(2\pi Av)}{\pi v} = 0$.

Finalement, on a

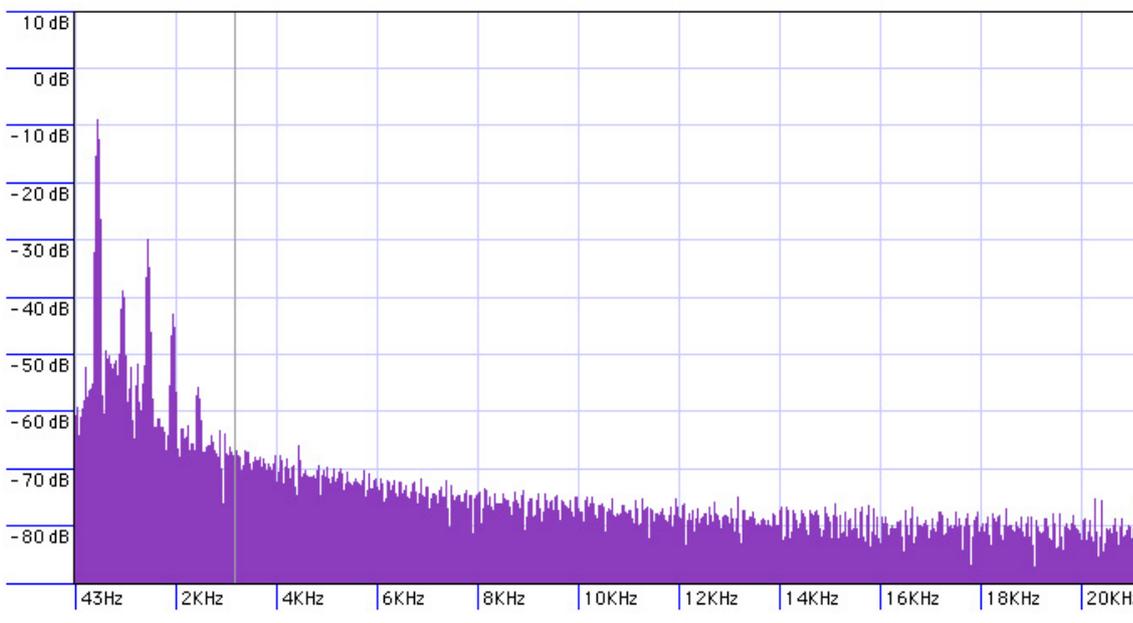
$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu = f(t). \quad \square$$

Un logiciel freeware et assez puissant, Audacity, disponible en ligne à l'adresse suivante :

<http://audacity.sourceforge.net>

permet d'analyser des sons et de décrire les fréquences qui le composent (le spectre). Un son réel émis par un instrument contient un *continuum* de fréquences qui sont analysables à travers le logiciel en question. A titre d'exemples, deux sons sont proposés au téléchargement : un son de violoncelle et un de clarinette. L'analyse fréquentielle de la clarinette par Audacity présentée ci-dessous

Par exemple l'analyse du son de clarinette amène le spectre suivant



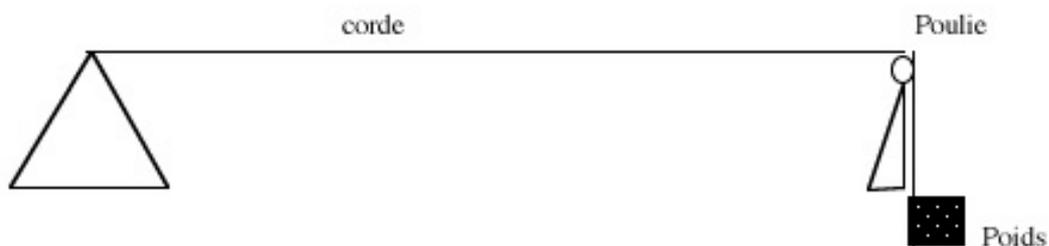
On voit nettement sur les trois premières harmoniques que la deuxième est en sensible retrait par rapport à la troisième (on a déjà mentionné que la forme d'onde est proche d'une onde carrée où seules les harmoniques impaires sont présentes). On peut bien sûr avec Audacity analyser toute sorte de sons, et en particulier la voix, exercice du plus grand intérêt.

Chapitre 3

Cordes vibrantes

Nous allons nous intéresser ici à un des modes les plus simples pour émettre un son, à savoir celui qui consiste à faire vibrer une corde, en général métallique, tendue entre deux attaches fixes.

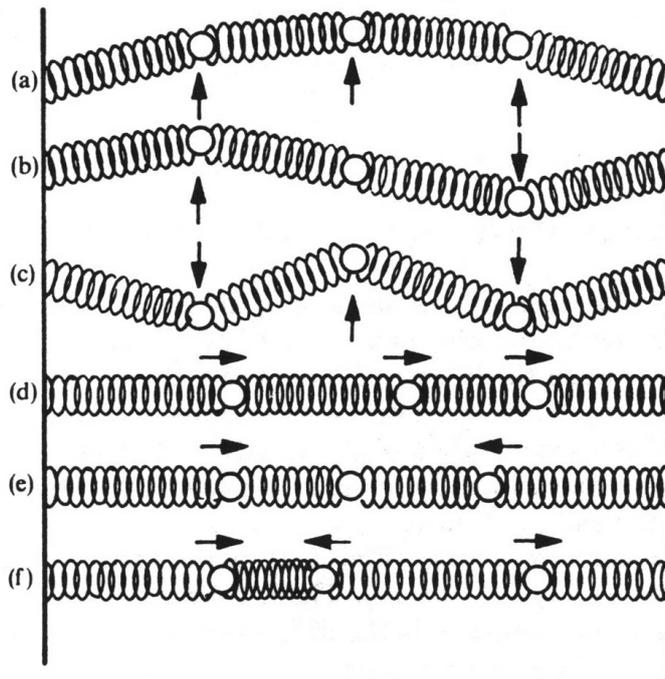
L'expérience la plus élémentaire qui peut être réalisée pour étudier la corde vibrante se présente comme ceci :



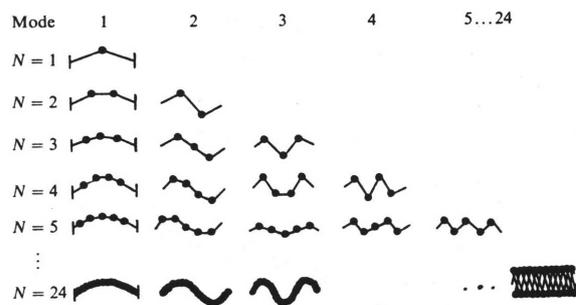
En faisant varier le poids attaché à la corde, on fait prendre à la tension des valeurs différentes ce qui a pour conséquence l'émission de sons différents quand la corde est mise en vibration, par exemple en la soulevant brièvement (*pizzicato*).

Le phénomène physique de la corde en vibration est connu depuis assez longtemps. Deux noms se détachent principalement parmi les scientifiques qui l'ont étudié : le Père Mersenne (1588-1648) et surtout Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783).

L'idée sous-jacente à une telle étude est de considérer que la corde est composée d'une succession de petits ressorts. Il est intéressant à ce titre de regarder la manière dont peut vibrer un système de ressorts montés bout à bout comme montré dans la figure ci-dessous

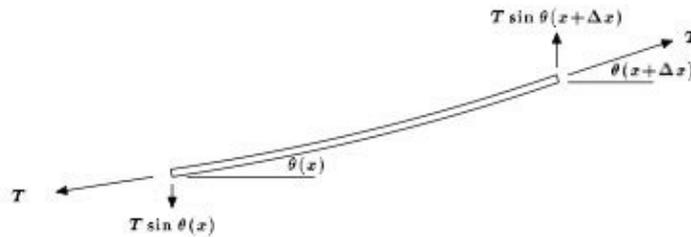


Différents modes de vibration sont alors possibles, aussi bien transversaux que latéraux, présentés ci-dessous pour des systèmes à $N = 1, 2, 3 \dots, 24$ ressorts. On verra par la suite que dans le cas de la corde vibrante, la forte tension de la corde permet en première approximation de négliger les vibrations latérales (en *accordéon*, pour employer une métaphore musicale. . .)



3.1 L'équation des cordes vibrantes

On regarde un petit segment de la corde en un instant t_0 , déformé par l'onde. On ne va s'intéresser qu'aux mouvements verticaux (transversaux par rapport à la corde) car la tension étant considérée comme très forte par rapport à toutes les autres forces en présence, on peut considérer les mouvements "en accordéon" de la corde comme négligeables.



On suppose que la norme du vecteur tension \vec{T} est constante le long de la corde.

Le bilan des forces verticales est donc $T \sin \theta(x + \Delta x) - T \sin \theta(x)$. Naturellement (contrairement à la figure où ils sont agrandis pour la clarté) les angles qui interviennent sont très petits. De ce fait, $\sin \theta(x + \Delta x) \approx \tan \theta(x + \Delta x)$ et $\sin \theta(x) \approx \tan \theta(x)$. Le bilan vertical des forces se réécrit donc

$$\begin{aligned} T[\tan \theta(x + \Delta x) - \tan \theta(x)] &\approx T\left(\frac{\partial y}{\partial x}(t_0, x + \Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(t_0, x)\right) \\ &\approx T\Delta x \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(t_0, x + \Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(t_0, x)}{\Delta x} \\ &\approx T\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t_0, x) \end{aligned}$$

si Δx est petit.

Appliquons alors le principe fondamental de la Dynamique. L'accélération en x au temps t_0 est donnée par $\rho\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t_0, x)$ où ρ est la masse linéaire de la corde (en kg/m). On a donc

$$T\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t_0, x) = \rho\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t_0, x)$$

et donc

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t_0, x) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t_0, x)$$

avec $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. C'est l' équation des cordes vibrantes, proposée par d'Alembert qui a également exposé une très belle méthode pour sa résolution.

3.2 Résolution de l'équation des cordes vibrantes

Repartons donc de l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t_0, x) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t_0, x)$$

L'idée de d'Alembert est que l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ qui opère sur les fonctions de deux variables peut se factoriser sous la forme $(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x})$ et l'équation de d'Alembert devient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0. \quad (3.1)$$

On fait alors un changement de variables sous la forme $u = x + ct, v = x - ct$, et naturellement, toute fonction de (t, x) peut être vue comme une fonction de (u, v) . On a, pour une telle fonction $\phi(u, v)$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial \phi}{\partial u} - c \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

et de même

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} = -2c \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} = 2c \frac{\partial \phi}{\partial u}$$

ce qui fait que (3.1) se transforme en

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \phi = 0$$

On a donc : $\frac{\partial}{\partial v} \phi(u, v) = \text{constante en } u = \varphi(v)$ et donc $\phi(u, v) = g(v) + \text{constante en } v = g(v) + f(u)$. On a alors

$$\phi(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

De plus, $\phi(t, 0) = 0 = \phi(t, l)$ (où l est la longueur de la corde) car les extrémités sont fixes. De ce fait, $f(ct) + g(-ct) = 0$ et comme ceci est vrai pour tout t , on en déduit que $f(\lambda) = -g(-\lambda)$ et donc $\phi(t, x) = f(x + ct) - f(ct - x)$. Enfin, $0 = \phi(t, l) = f(l + ct) - f(ct - l)$ étant vrai pour tout t , on a $f(\lambda + 2l) = f(\lambda)$, soit f , $2l$ -périodique.

En résumé, la solution générale de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

avec $\phi(t, 0) = \phi(t, l) = 0$ est donnée par

$$\phi(t, x) = f(x + ct) - f(ct - x)$$

où f est $2l$ -périodique. L'onde qui se propage dans la corde apparaît donc comme la superposition des deux mêmes ondes se déplaçant en sens inverse avec une vitesse c .

3.3 Décomposition des solutions. Ondes stationnaires

La fonction f intervenant dans la solution précédemment proposée de l'équation des cordes vibrantes est $2l$ périodique et naturellement régulière. On peut donc la décomposer en série de Fourier sous la forme

$$f(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(\frac{\pi n u}{l}) + b_n \sin(\frac{\pi n u}{l}))$$

avec

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(u) \cos \frac{\pi n u}{l} du \\ b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(u) \sin \frac{\pi n u}{l} du \end{cases}$$

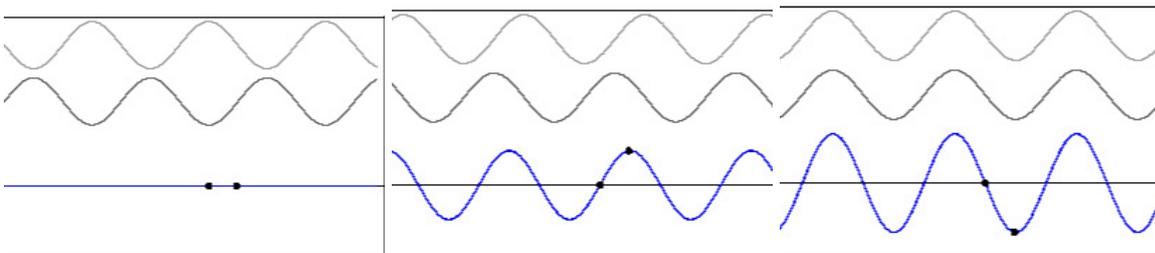
De ce fait,

$$\begin{aligned} y(t, x) &= f(x + ct) - f(-x + ct) \\ &= \sum_{n \geq 1} a_n \left[\cos \frac{\pi n (x + ct)}{l} - \cos \frac{\pi n (-x + ct)}{l} \right] + \sum_{n \geq 1} b_n \left[\sin \frac{\pi n (x + ct)}{l} - \sin \frac{\pi n (-x + ct)}{l} \right] \\ &= -2 \sum_{n \geq 1} a_n \sin \frac{\pi n ct}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} + 2 \sum_{n \geq 1} b_n \cos \frac{\pi n ct}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} \\ &= 2 \sum_{n \geq 1} [b_n \cos \frac{\pi n ct}{l} - a_n \sin \frac{\pi n ct}{l}] \sin \frac{\pi n x}{l} \\ &= 2 \sum_{n \geq 1} c_n \sin(\frac{\pi n ct}{l} + \varphi_n) \sin \frac{\pi n x}{l} \end{aligned}$$

si on a posé

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \frac{b_n}{c_n} = \sin \varphi_n \text{ et } -\frac{a_n}{c_n} = \cos \varphi_n.$$

y apparaît donc comme une superposition d'ondes élémentaires du type $\sin(\frac{\pi n ct}{l} + \varphi_n) \sin \frac{\pi n x}{l}$. Ces ondes sont remarquables en cela qu'elles sont stationnaires : à chaque instant t la forme de l'onde sur la corde est donnée par $\sin(\frac{\pi n x}{l} + \varphi_n)$, le facteur $\sin \frac{\pi n x}{l}$ qui est constant apparaît comme un modulateur d'amplitude. Inversement, pour un point donné x , la vibration en ce point est la sinusoïde $\sin(\frac{\pi n ct}{l} + \varphi_n)$. Ci-après sont représentés trois instants de la vibration d'une onde stationnaire (en bleu), superposition de deux ondes symétriques représentées en gris. On voit nettement que la forme instantanée de l'onde reste invariante et que seule change l'amplitude du déplacement.



Le fichier Onde Stationnaire présente une animation de ce phénomène.

Une autre remarque fondamentale est que les ondes stationnaires qui composent l'onde y parcourent toutes les fréquences multiples entières d'une *fréquence fondamentale* $\nu_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. La

fréquence de la n -ième harmonique est donc donnée par $\nu_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, résultat qui avait déjà été trouvé par Mersenne au XVIIème siècle. Rappelons que ceci n'est pas le cas pour toutes les familles d'instruments : on a déjà vu que pour la clarinette, les multiples impairs de la fondamentale ont tendance à prédominer.

Voyons une petite application de ces formules.

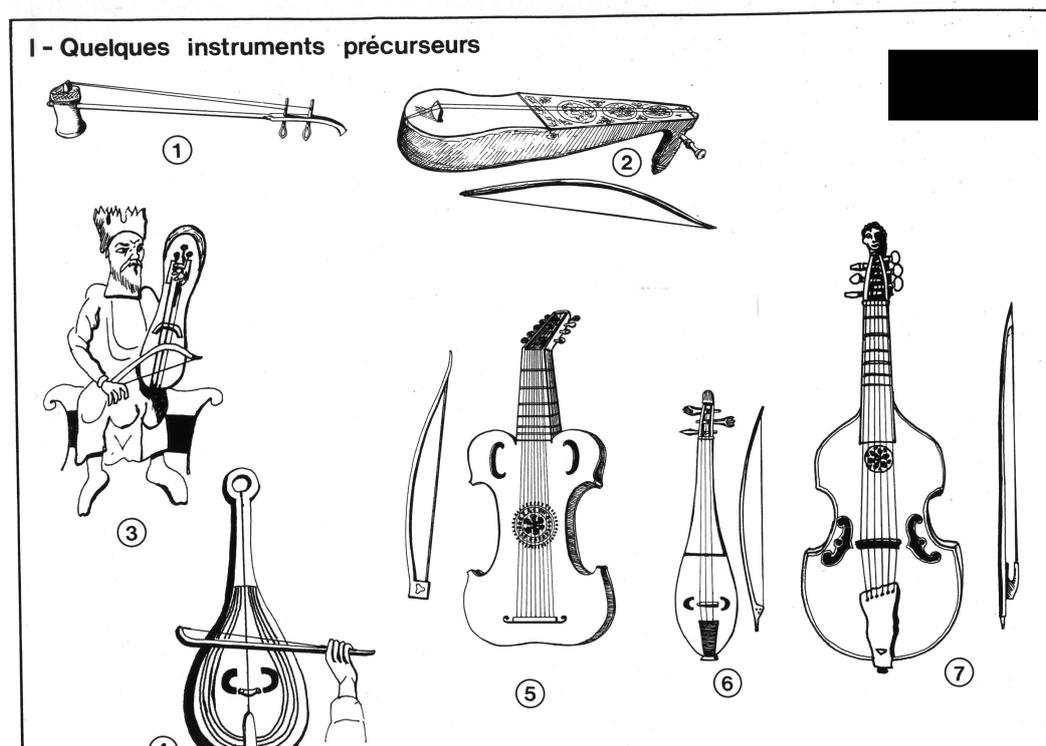
Exercice 3.3.1

On considère une corde de piano en acier de masse linéaire $72 \cdot 10^{-3}$ kg/m. La tension recommandée est de $12 \cdot 10^3$ N. Quelle est la longueur nécessaire pour que la fréquence fondamentale de la corde soit un Do 262 Hz ?

Chapitre 4

Les cordes frottées

Nous allons commencer par un aperçu sommaire de la famille des instruments à cordes qui se jouent à l'aide d'un archet, par opposition à ceux dont les cordes sont pincées (guitare, clavecin...) ou frappées (piano, cymbalum...). De nombreux instruments de cette famille existaient il y a très longtemps comme l'illustre la planche ci-dessous (où on remarque le ravanastron (1), le rebab(2), le crouth (3), la lira (4), la grande gigue (5), le rebec (6) et enfin la viole (6)).

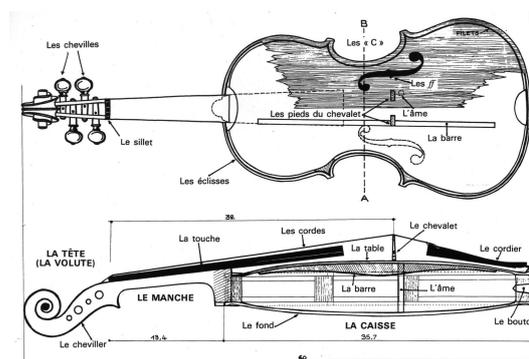


Au Moyen-Âge se sont stabilisées deux familles d'instruments à cordes frottées : les violes *da gamba* qui se tenaient entre les jambes et les violes *di braccio* qui reposaient dans le creux du bras. Les premières étaient les instruments de cour et les secondes au contraire ceux du peuple. Un

renversement va se produire au XVIIIème siècle, à un moment où les compositeurs, notamment italiens, vont s'intéresser de plus en plus aux possibilités immenses procurées par les instruments *di braccio* permettant une technique plus agile, et la famille des violes *di gamba* va tomber en désuétude. Faisons à ce sujet une amusante remarque de sémantique. Le mot *violon* que nous avons en français vient d'une mauvaise transcription de l'italien. En italien, violon se dit *violino* (du suffixe *ino* qui diminue) alors que *violone* (avec le suffixe *one* qui augmente) désigne la grosse viole, c'est à dire la contrebasse. D'ailleurs la contrebasse moderne est l'unique survivant moderne des violes *di gamba* et elle en a d'ailleurs gardé l'accord de quarte en quarte, quand les trois autres instruments de la famille des instruments à cordes frottées modernes (violon, alto et violoncelle) sont accordés de quinte en quinte. On peut noter sur l'illustration ci-dessous des quatre instruments la forme spécifique de la contrebasse.



Le corps de l'instrument est composé de nombreuses pièces assemblées présentées dans la figure ci-dessous



La *table* est en général faite en pin, alors que les autres parties (en particulier le *dos*) sont en érable. La *touché* est en ébène.

Le *chevalet* destiné à transmettre la vibration de la corde à la table est en bois léger et dur.

Les vibrations au niveau du chevalet sont très petites mais, comme elles sont transmises de façon continue à un corps assez volumineux, la vibration de ce dernier dégage une énergie appréciable.

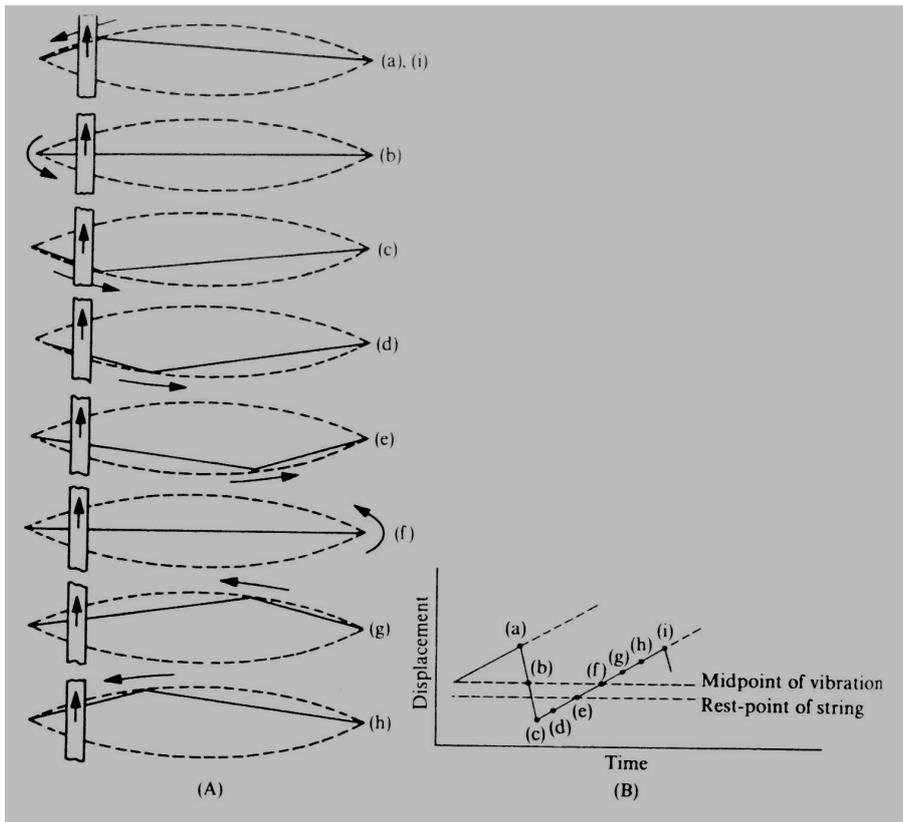
L'archet est composé d'une baguette faite en général en bois de permanbouc. Il est équipé d'un talon ou hausse muni d'un mécanisme à pas de vis permettant de régler la tension du bois et par suite celle de la mèche, formée de crins (en général de cheval), qui lui est fixée.

4.1 Description physique de la corde frottée

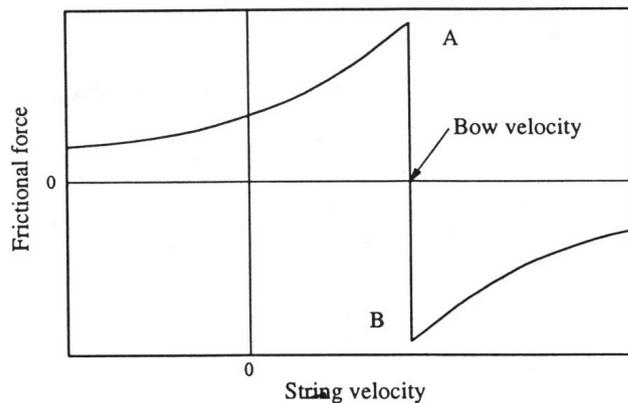
Nous avons regardé dans la section précédente le mouvement de la corde libre. Nous allons maintenant considérer comment les choses se passent quand la corde est soumise au frottement d'un archet. En particulier, comment se fait-il que la corde puisse continuer à vibrer, alors qu'on pourrait penser que l'archet agirait comme un étouffoir.

En fait, le mécanisme en question est compliqué et a été compris assez récemment, et nous allons nous contenter d'en donner une analyse superficielle. La notion centrale pour cette question est celle de *forces de frottements*. On sait qu'il y en a de deux types : une force de frottements statiques qui agit pour retenir l'un à l'autre deux objets immobiles l'un par rapport à l'autre (c'est le type de force qui empêche de pousser une table très lourde posée sur le sol), et une force de frottements dynamiques quand les objets sont en mouvement relatif (c'est la force qui fait grincer les pieds d'une table quand elle est en mouvement). La friction statique est nettement plus importante en intensité que la friction dynamique (quand on lance la table lourde avec une force suffisante pour surmonter le frottement statique, elle reste en mouvement un certain temps), et inversement proportionnelle à la vitesse relative (pensez à une voiture : plus elle va vite, moins les pneus adhèrent à la chaussée). Remarquons enfin que la force de friction dynamique est bien entendu dirigée dans le sens opposé à la vitesse relative.

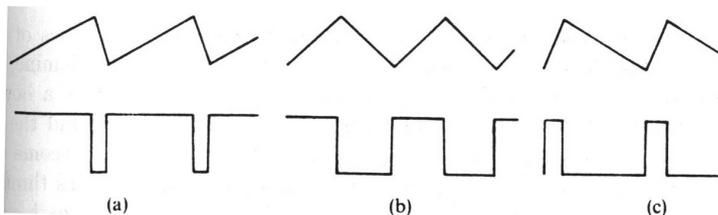
Nous allons maintenant regarder ce qui se passe pour la corde déjà en vibration (la phase de mise en mouvement est plus compliquée) sur laquelle un archet est supposé aller à vitesse constante. La formation de l'onde est schématisée par le graphique suivant



Au temps (a), la corde, à son maximum d'amplitude, part dans la direction opposée à l'archet. La force de friction la ralentit jusqu'à ce qu'elle devienne presque immobile (en vitesse absolue (c)). La force de frottement change alors brusquement de sens et se met dans la direction du mouvement de l'archet. La corde repart alors dans l'autre sens avec une vitesse absolue qui augmente et une vitesse relative à l'archet qui diminue donc : ceci dure jusqu'à ce que la vitesse relative par rapport à l'archet soit nulle. A ce moment là, la force de friction change de nouveau brusquement de sens et la corde repart dans l'autre sens, et on est ramené au temps (a)...Le schéma ci-dessous représente l'intensité de la force de frottements en fonction de la vitesse de la corde.



Une remarque importante est que la vitesse relative quand la corde va dans le sens inverse à l'archet (phase B, *slip*) est évidemment plus élevée que si elle va dans le même sens et adhère à l'archet (phase A, *stick*). De ce fait, dans la phase B (*slip*), la force de frottements est moins élevée et donc moins d'énergie est prise à la corde qu'il ne lui en est apportée dans la phase *stick*, et la corde peut continuer à vibrer. Il résulte de cette description les dents de scie caractéristiques de la forme d'onde des instruments à cordes frottées. Le schéma ci-dessous montre la forme d'onde produite sur la corde suivant la place que prend l'archet sur la corde.

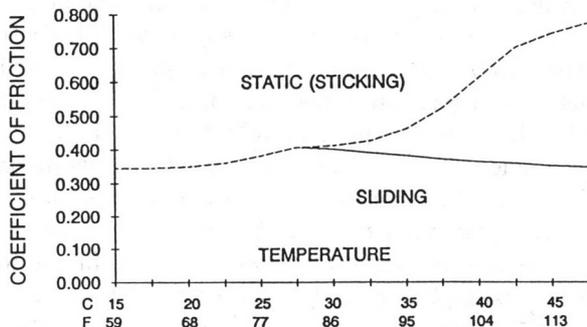


4.2 Rôle de la collophane

Le crin de cheval utilisé en principe pour la fabrication de la mèche d'un archet a en fait de très mauvaises propriétés de frottements. Chacun peut faire l'expérience de frotter une corde avec un archet dont la mèche vient d'être installée (ou à défaut avec une mèche de cheveux...) et se rendre compte que cela ne produit aucun son. Il est donc nécessaire d'utiliser un procédé qui crée d'importantes forces de frottement pour pouvoir jouer avec un archet.

Le produit utilisé est une résine de conifère, la *collophane*, présentée sous forme d'un petit pain en général cylindrique, dont on enduit les crins. Quand on frotte la mèche, de très petites particules sont emprisonnées par électrisation statique qui forment une fine couche. C'est cette couche qui va en fait être en contact avec la corde. La collophane a en outre d'intéressantes propriétés chimiques présentées dans le schéma ci-dessous, liées à l'augmentation de la température (au point de contact entre l'archet et la corde elle peut croître de plusieurs dizaines de degrés !) : celle-ci entraîne à la fois un accroissement du coefficient statique de frottements (d'où une amélioration de l'adhérence en phase *stick*) et une diminution du coefficient dynamique (d'où

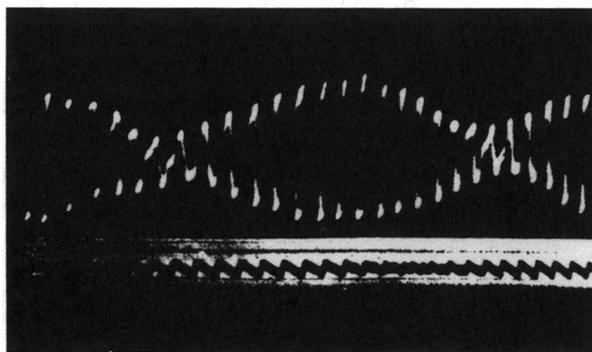
une amélioration du glissement en phase *slip*.



4.3 Quelques anomalies connues des instrumentistes...

4.3.1 Le loup

Ce phénomène peut-être décrit de la façon suivante. Le corps d'un instrument, comme n'importe quel solide, a une fréquence de résonance privilégiée, c'est à dire une fréquence où l'amplitude de ses vibrations est maximale. A cette fréquence, le chevalet vibre lui aussi de façon maximale, ce qui fait que la transmission de la vibration de la corde à la table se fait plus difficilement. C'est spécialement vrai pour un instrument comme le violoncelle dont le chevalet est proportionnellement plus haut que celui du violon. A cette fréquence de résonance (pour le violoncelle elle se situe autour du *mi* de la deuxième octave), le son est difficile à maintenir stable. L'illustration suivante montre une vue au stroboscope en haut de la vibration de la table, en bas de la corde en vibration sur un loup. On voit nettement les perturbations de l'onde produite dues à la vibration maximale de la table.



Pour certains violoncelles le loup est tellement fort que le jeu est simplement impossible sur la note concernée. Pour stabiliser le son, on ajoute en général un petit résonnateur (une sourdine à loup, *wolfdämpfer* en allemand) soit sur la corde soit plus efficacement sous un pied du chevalet

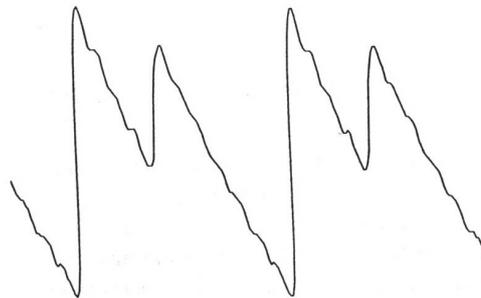
de façon à absorber la vibration excessive de la table.

4.3.2 Sifflement de la corde

Nous avons vu comment fonctionnait l'apport d'énergie à la corde par frottement d'un archet. Naturellement, il y a aussi dans la corde en vibration des ondes longitudinales. En particulier, si l'archet n'est pas bien perpendiculaire à la corde, la section horizontale devient elle-même une sorte de petite corde en vibration, naturellement avec une fréquence beaucoup plus élevée que celle de la corde dans sa longueur. D'où l'émission de temps en temps d'un son strident, typique des violonistes débutants ayant du mal à stabiliser l'archet dans une direction fixe.

4.3.3 Double oscillation

Si la pression d'archet n'est pas suffisante, il peut se faire que l'adhérence ne soit pas suffisante pour la réalisation complète de la phase *stick* et que la corde soit relâchée dans la phase *slip* plus tôt que normalement, la phase *stick* suivante arrivant elle aussi plus tôt. Tout se passe alors comme si la corde vibrait à une fréquence double et le son entendu (en général assez flou, ou comme on dit souvent *de surface*) est une octave au dessus de celui normalement attendu. Le schéma ci-dessous présente la forme typique d'un tel redoublement de l'onde



Chapitre 5

Consonnances et tempéraments : le son ordonné

Jusqu'à présent, nous nous sommes principalement intéressés aux aspects physiques du son. Or, selon la jolie formule de John Blacking, la musique peut être conçue comme du *son humainement organisé*. De ce fait, nous allons nous intéresser de plus près à des principes fondateurs de cette organisation qui souvent s'appuient de manière plus ou moins annoncée sur les caractéristiques physiques (et notamment spectrales) que nous avons exposées auparavant. Notre intérêt va principalement ici se porter vers la musique de tradition occidentale qui constitue le cadre sonore le plus répandu dans notre société. Il est bien évident qu'il ne s'agit que d'un système parmi d'autres, et que l'étude d'autres modes culturels porte en lui un intérêt égal. L'auteur de ces lignes avoue malheureusement sa complète incompetence en la matière. Le livre de Blacking cité ci-dessus donne une bonne idée d'une telle étude dans une société traditionnelle d'Afrique noire par un très grand pionnier de l'ethnomusicologie.

5.1 Le cycle des quintes

C'est traditionnellement à l'Antiquité grecque, à Pythagore et à Platon, qu'on fait remonter les fondements numériques de la *science des sons*. Les énoncés grecs auront une telle portée symbolique qu'on les retrouvera quasiment inchangés quinze siècles plus tard, au moment où des études expérimentales plus serrées commenceront à dépasser le strict cadre pythagoricien.

Commençons par dire deux mots de la légende de Pythagore. Selon celle-ci, le philosophe grec, passant devant une forge, fut surpris d'entendre des *accords* consonnants quand certains des garçons de forge abattaient ensemble leurs marteaux sur l'enclume. Comparant les masses des marteaux, Pythagore aurait constaté que plus les rapports de masse étaient donnés par de petites fractions (au sens $\frac{m}{n}$ avec m et n petits), plus le son émis était harmonieux. Il aurait ensuite vérifié que les mêmes consonnances étaient obtenues sur le monocorde (instrument d'expérience comprenant une corde tendue) quand les rapports des longueurs de corde étaient les mêmes que celles des masses des marteaux.

Cette légende bien naïve met en relief le fondement même de la science grecque : la nature est intelligible à travers les nombres et la simplicité numérique est parallèle avec la simplicité du

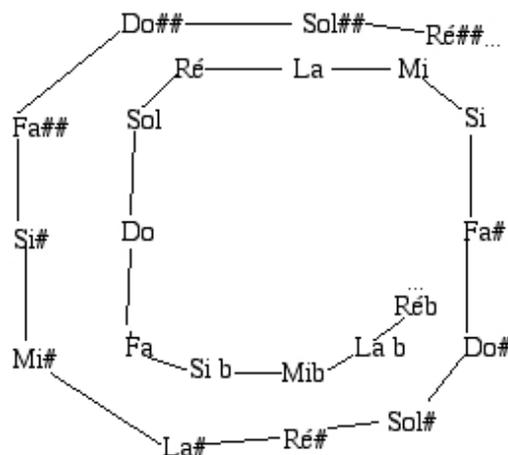
phénomène étudié (ici la consonnance).

Dans l'étude des cordes vibrantes, nous avons vu que la fréquence fondamentale de la corde était inversement proportionnelle à la longueur. De ce fait, les rapports de fréquences envisagés correspondent aux mêmes rapports de longueur de corde.

Le plus "petit" rapport possible est $\frac{1}{2}$. Il correspond à un rapport de fréquence de 1 à 2, appelé octave. Si les deux notes sont jouées ensemble, les vibrations de la plus aiguë et de la plus grave sont très imbriquées au point que le cerveau établit des liens très forts (phénomène qui avait été exploité dans l'illusion des sons de Shepard). On va considérer qu'il s'agit en fait de la même note.

Le rapport qui vient ensuite est $\frac{3}{2}$. L'intervalle ainsi construit est la quinte et il va constituer la base de tout l'édifice de l'harmonie occidentale. Il est important de noter que la quinte apparaît aussi comme le premier intervalle naturel dans les harmoniques de la corde vibrante. On a en effet vu que pour une corde de fréquence fondamentale ν , les harmoniques suivantes ont pour fréquence $2\nu, 3\nu, \dots$. Or le rapport de fréquence entre 2ν et 3ν vaut $\frac{3}{2}$.

Partons alors d'une note de fréquence ν que nous appellerons Fa. La note de fréquence $\frac{3}{2}\nu$ est appelée Do, celle de fréquence $(\frac{3}{2})^2\nu$, Sol. Ré, La, Mi, Si, Fa#, Do#, Sol#, Ré#, La#, Mi#, Si#, Fa##... sont ainsi construits de quinte en quinte en multipliant les fréquences par $\frac{3}{2}$. Si on avait été en descendant, on aurait d'abord eu des bémols, puis des double-bémols etc.



SPIRALE DES QUINTES

Notons qu'on n'a jamais $(\frac{3}{2})^k = 2^m$ pour m et k deux entiers naturels non nuls et donc que les notes ainsi construites sont toutes différentes (en considérant comme identiques des notes distinctes d'une ou plusieurs octaves). Cependant, $3^{12} = 531441$ et $2^{19} = 524288$ et donc la note de fréquence $(\frac{3}{2})^{12}$ (c'est à dire le mi #) se retrouvera très proche de la 7ème octave du Fa de départ.

Nous faisons l'*approximation* que ces deux notes sont identiques. La spirale précédente se transforme alors en un cercle, dit cycle des quintes qui contient 12 notes (13 avec l'octave de la note de départ). Par division par une puissance de 2 adéquate, on ramène toutes les fréquences

entre ν et 2ν ce qui donne les rapports de fréquence indiqués et l'ordre habituel par fréquences croissantes, qui définit la gamme pythagoricienne .

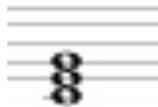
NOTE	fa	mi#	fa#	sol	sol#	la	la#	si	do	do#	ré	ré#	mi	fa
Fréq. rel.	1	$\frac{531441}{524288} \approx 1,013$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{19683}{16384}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{177147}{131072}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{59049}{32768}$	$\frac{243}{128}$	2

Dans le tableau ci-dessus, le mi# n'est rappelé que pour mémoire. L'écart entre mi# et fa (soit un rapport de fréquence de 1,0136 environ) est dit *comma pythagoricien*.

5.2 Quelques éléments d'harmonie

Nous allons ici présenter très sommairement des accords fondamentaux dans l'harmonie classique, et les problèmes que leur utilisation soulève.

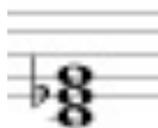
5.2.1 Accord parfait majeur



Il s'agit de l'accord constituée par les harmoniques 4,5 et 6 d'une fondamentale. Typiquement, si celle-ci est de fréquence ν , il s'agit des trois notes de fréquences 4ν , 5ν , 6ν (Do,Mi,Sol par exemple). Les rapports entre les trois notes sont donc de $5/4$ (tierce majeure juste) et $6/5$ (tierce mineure juste). On peut remarquer que la tierce majeure juste ($5/4=80/64$) est un peu plus courte que la tierce pythagoricienne ($81/64$). L'écart de fréquences $81/80$ est appelé *comma syntonique*.

En regardant les harmoniques des trois notes constituant l'accord parfait, on constate aisément qu'elles ont de très nombreuses notes communes ce qui fait qu'il s'agit d'un accord très stable.

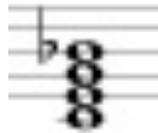
5.2.2 Accord parfait mineur



Il est obtenu en renversant les deux rapports précédents : une tierce mineure puis une tierce majeure par exemple Do,Mib,Sol de rapports $6/5$ puis $5/4$. On note un phénomène psycho-acoustique

intéressant : les trois notes ont une harmonique commune qui est le Sol deux octaves au dessus de la fondamentale. On pense que c'est cette lointaine résonance qui nous fait associer le mode mineur à un certain effet de regret ou de tristesse.

5.2.3 Septième de dominante



Si l'on regarde maintenant l'accord constitué par les harmoniques 4,5,6 et 7, on obtient l'accord à quatre sons dit de septième de dominante de rapports successifs : $5/4, 6/5, 7/6$ soit typiquement Do, Mi, Sol, Si \flat . C'est un accord assez instable ; il l'est rendu encore plus quand le Si \flat est haussé jusqu'au degré pythagoricien. En ce cas l'écart Do-Si \flat vaut $16/9$ au lieu de $7/4$. Les harmoniques du Si \flat se retrouvent alors en décalage accru avec les autres notes et la tendance à la résolution en Fa majeur est accentuée.

5.2.4 Problème de l'harmonie classique

L'harmonie s'occupe du problème d'enchaînement des accords. Un enchaînement typique est

I-vi-ii-V-I

où les majuscules désignent un accord parfait majeur et les minuscules un accord parfait mineur.



Une règle simple et naturelle est que dans deux accords contigus, les notes communes soient les mêmes. Analysons alors la séquence précédente

	Do-Mi-Sol	
	La-Do-Mi	La= $5/3$ Do
	Ré-Fa-La	Ré= $2/3$ La
	Sol-Si-Ré	Sol= $4/3$ Ré
Do-Mi-Sol		Do= $2/3$ Sol

Le Do final est donc par rapport au Do initial à une fréquence $\frac{5}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{80}{81}$, c'est à dire un comma syntonique au dessous. On voit donc que même cet exemple simple d'enchaînement harmonique pose un problème de cohérence avec la définition des accords parfaits donnée précédemment qu'il va falloir régler pour circuler entre les tonalités.

5.3 Le tempérament

De la non-jonction exacte du cycle de quinte et de l'approximation qu'on doit faire pour se limiter à un système à douze tons a résulté une des questions centrales du phénomène musical, le problème du choix d'un bon tempérament. Autrement dit, il a fallu se poser la question de la façon la plus judicieuse pour répartir les douze sons de l'octave pour permettre la plus grande souplesse d'utilisation, notamment dans la question des modulations. Ce casse-tête a occupé des générations de musiciens et de savants. Une œuvre très célèbre de Jean-Sébastien Bach, *Le clavier bien tempéré* qui comprend un prélude et une fugue dans chacune des tonalités majeures et mineures du total chromatique (les douze degrés de l'octave), illustre la nécessité de ce choix judicieux pour permettre une bonne circulation des tonalités.

La gamme pythagoricienne fournit un choix possible de tempérament, mais nous allons voir qu'il n'a pas que des avantages. Partons d'une note, disons un Do par exemple, de fréquence ν . Le Mi au dessus de cette note (tierce majeure) est donné dans la gamme pythagoricienne par la fréquence $\frac{81}{64}\nu$. D'un autre côté, partons d'une corde dont le Do est la fréquence fondamentale. La quatrième harmonique de cette corde est un Do deux octaves au dessus, et la cinquième une note, qui ramenée à l'octave a pour fréquence $\frac{5}{4}\nu = \frac{80}{64}\nu$ et est donc très proche du Mi pythagorien sans pour autant lui être égal. Il s'agit de la tierce du tempérament juste dont la résonance, pour les raisons que nous venons d'exposer, est beaucoup plus stable que la tierce pythagoricienne. Ceci n'est qu'un exemple parmi d'autres.

Pour représenter une répartition de fréquences, on adopte généralement le système de représentation en *cents*. Il s'agit d'une mesure d'un rapport de fréquences. Si on considère deux notes de fréquences respectives f_1 et f_2 , 1 cent (ou plutôt *une augmentation de la fréquence dans un rapport de 1 cent*) correspond à

$$1200 \frac{\ln \frac{f_2}{f_1}}{\ln 2}$$

ou encore n cents correspondent à un rapport de fréquence de $2^{\frac{n}{1200}}$. Il s'agit donc d'une unité relative à une fréquence donnée et à échelle logarithmique. En particulier, une octave correspond à un accroissement de 1200 cents. La constante 1200, qui peut sembler quelque peu étrange, est évidemment faite pour envisager facilement une répartition égale des 12 degrés du total chromatique. Le choix de cette répartition, totalement artificielle mais pour laquelle le rapport de fréquence qui définit un demi-ton (et par suite celui de tous les intervalles) est constant ; pour le demi-ton il est égal à $\sqrt[12]{2}$ ou 100 *cents*. On parle alors de *tempérament égal*. D'un point de vue théorique, il est clair qu'il s'agit du tempérament permettant la plus grande équivalence entre tous les choix de tonalités. Le défaut vient par contre du fait qu'en tempérament égal les résonances naturelles ne sont pas présentes et que de ce fait la polyphonie sonne de façon assez terne.

Un autre choix de tempérament est celui de la gamme dite juste, car elle utilise les résonances naturelles. Elle est basée sur le choix d'une tonalité privilégiée, ce qui fait qu'il y aura des tona-

lités qui ne seront pas équivalentes. L'idée est d'imposer trois accords parfaits majeurs (rapport 5/4 et 6/5) sur les premier, quatrième et cinquième degré de la tonalité (en Do majeur, Do, Fa, Sol ...) ce qui construit les notes Ré, Mi, Fa, Sol, La et Si. On obtient alors la répartition suivante des fréquences (en cents)

NOTE	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
CENTS	0	203, 91	386, 31	498, 05	701, 96	884, 36	1088, 27	1200

Noter que dans ce tempérament les quintes ne sont plus justes : elles sont baissées d'un quart de comma. Le total chromatique est complété quinte par quinte, diminuée d'un ou plusieurs commas.

Ci-dessous sont résumés les trois tempéraments mentionnés

TEMPERAMENT PYTHAGORICIEN

NOTE	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
CENTS	0	203, 91	407, 81	498, 05	701, 96	905, 86	1109, 77	1200

TEMPERAMENT JUSTE

Tierces et quintes sur les degrés I (*Do*), IV (*Fa*) et V (*Sol*) : $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$.

NOTE	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
CENTS	0	203, 91	386, 31	498, 05	701, 96	884, 36	1088, 27	1200

TEMPERAMENT EGAL

Tous les 1/2 tons : $\frac{f_2}{f_1} = 2^{1/12}$ (soit 100 cents)

NOTE	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
CENTS	0	200	400	500	700	900	1100	1200

5.4 Illustration : *Hora Lunga* de la sonate pour alto solo de Ligeti

Nous allons illustrer les notions précédentes par l'utilisation qu'en a fait le très grand compositeur contemporain hongrois György Ligeti (né en 1923) dans le premier mouvement de sa Sonate pour alto (composée en 1994) intitulé *Hora Lunga* d'après une danse populaire roumaine.

Hora Lunga

György LIGETI

Lento rubato (ma ritmico)

12 Toujours sur la corde de Do jusqu'à la fin

p molto espr., dolente *mf* *p* *mf* *p*

poco f *p* *mf*

f *p* *mf*

f *più f* *meno f*

2 Hora Lunga

più f *p* *pp*

p *mf* *f* *mf*

p *mf* *f* sempre molto espr.

più f *appassionato dolente* *ff*

cresc. *fff* *f* *ff*

5.4. ILLUSTRATION : HORA LUNGA DE LA SONATE POUR ALTO SOLO DE LIGETI 45

Hora Lunga 3

25 *fff* *intenso*
utiliser tout l'archet

31 *ff* *mf* *pp* "da lontano"

34

37 *ppp* *morendo*
Jouer même si les harmoniques les plus hautes sortent difficilement

Bibliographie ultra-sommaire

- D.BENSON : **Music and Mathematics**. Va sortir en livre chez Cambridge University Press mais est téléchargeable *gratuitement* sur Internet à l'adresse suivante
www.maths.abdn.ac.uk/bensondj/html/maths-music.html
- H.FASTL, E.ZWICKER : **Psychoacoustics, Facts and Models**. Springer, 2005
- N.H.FLETCHER, T.D.ROSSING : **The Physics of Musical Instruments**. Springer, 1991
- J.LATTARD : **Gammes et tempéraments musicaux**. Masson, 1988