

ÉPREUVE

Exercice 1 : Deux champs scalaires

On considère une théorie avec deux champs scalaires $\phi(x)$ et $\eta(x)$. Le lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}M^2\eta^2 + \frac{1}{2}\mu\eta\phi^2.$$

1. Trouvez la dimension du couplage μ .
2. Donnez les équations de mouvement classiques de ϕ et de η .
3. Énoncez les règles de Feynman pour cette théorie dans l'espace d'impulsions. (Pas de justification détaillée requise ; pour le vertex, toute réponse correcte à une phase complexe près sera acceptée. Il faut bien distinguer les propagateurs de ϕ et de η .)
4. Tracez le(s) diagramme(s) de Feynman qui contribue(nt) à la fonction à un point $\langle 0|\eta(x)|0\rangle$ au niveau d'une boucle. Donnez-en l'expression, sans propagateur externe, en régularisation dimensionnelle dans $d = 4 - 2\epsilon$ dimensions. Pour la suite, on supposera qu'un contre-terme approprié assure $\langle 0|\eta(x)|0\rangle = 0$.
5. On étudiera la renormalisation de la fonction à deux points de η . En théorie des perturbations renormalisée, on introduit un contre-terme $\overset{p}{\rightarrow}\otimes = i(p^2\delta_Z - \delta_{M^2})$. L'auto-énergie $-i\Sigma(p^2)$ est la somme de tous les diagrammes irréductibles à une particule (1PI) avec deux η externes, sans compter les propagateurs externes.
 - (a) Tracez le(s) diagramme(s) qui contribue(nt) à $-i\Sigma(p^2)$ au niveau d'une boucle.
 - (b) Sachant que la fonction à deux points renormalisée vérifie

$$G(p^2) \equiv \int d^4x \langle 0|T \eta(x)\eta(y)|0\rangle e^{-ip(x-y)} = \frac{i}{p^2 - M^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon},$$

montrez explicitement : si $\Sigma(p^2 = M^2) = 0$ et $\Sigma'(p^2 = M^2) = 0$, alors le pôle de $G(p^2)$ est à $p^2 = M^2$ et son résidu est i .

- (c) Trouvez l'expression du contre-terme δ_Z en régularisation dimensionnelle avec les conditions de renormalisation de (b). Vous pouvez vous servir des résultats du cours pour les intégrales de boucle sans répéter le calcul. Il n'est pas demandé d'évaluer les intégrales sur les paramètres de Feynman.

6. On suppose maintenant que $M \gg m$ et $M \gg \mu$; ainsi, à basse énergie, le champ η n'est pas excité et on peut inclure ses effets dans un lagrangien effectif $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ pour ϕ . Substituez la solution formelle de l'équation de mouvement de η (voir question 2.) dans $\mathcal{L}$ pour montrer que

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{8} \frac{\mu^2}{M^2} \sum_{n=0}^{\infty} \phi^2 \left(-\frac{\square}{M^2} \right)^n \phi^2.$$

Jusqu'à quelle échelle d'énergie la description effective sera-t-elle valide ? Pourquoi ?

Indication : Question 6 est indépendante des questions 3., 4. et 5.

Exercice 2 : Spineurs et matrices de Dirac

- Montrez que $\bar{u}_s(\vec{p}) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) = 2\delta_{sr} p^\mu$.
- Pour p_μ et q_μ des quadrvecteurs, simplifiez l'expression $\gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu$ dans $d = 4$ dimensions.
- Soit $\psi = \psi(x)$ un champ de Dirac; vu que ψ est un champ grassmannien dans le formalisme de l'intégrale de chemin fermionique, pourquoi est-ce qu'un terme comme $(\bar{\psi}\psi)^2$ dans le lagrangien n'est pas égal à zéro ? Qu'en est-il de $(\bar{\psi}\psi)^5$?

Exercice 3 : Lagrangien de l'électrodynamique quantique et invariance de jauge

Pour rappel, l'électrodynamique quantique est une théorie renormalisable dont le lagrangien est

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \quad \not{D}\psi = \gamma^\mu D_\mu \psi = \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi.$$

Dans cet exercice, on étudiera la question si $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ est unique ou si on pourrait y ajouter des termes supplémentaires. On rappelle que, par une transformation de jauge, $\psi \rightarrow e^{ie\Lambda}\psi$ et $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda$, où $\Lambda = \Lambda(x)$ est une fonction scalaire.

- Montrez que $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ est invariant de jauge.
- On propose d'ajouter à $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ le terme $G F_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma^{\mu\nu} \psi$, où G est un couplage. Pourquoi ce terme est-il problématique (on perdrait quelle propriété désirable ?)
- On propose d'ajouter à $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ le terme

$$\mathcal{L}_\theta = \theta \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} F^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda}$$

où θ est un couplage. Donnez des arguments pourquoi, au premier abord, cette proposition pourrait sembler raisonnable.

- En fait, $\mathcal{L}_\theta$ peut s'écrire comme une divergence totale, $\mathcal{L}_\theta = \partial_\mu K^\mu$. Trouvez K^μ en fonction de A_μ , $F_{\mu\nu}$, $\bar{\psi}$ et ψ . Est-ce que K^μ est invariant de jauge ?
- On propose d'ajouter à $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ le terme

$$\mathcal{L}_{\bar{\psi}} = (iD_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi.$$

Comment faut-il que D_μ agisse sur $\bar{\psi}$ pour que ce terme puisse figurer dans le lagrangien ? Montrez que la somme de $\mathcal{L}_{\bar{\psi}}$ et $\bar{\psi} i \not{D} \psi$ est une divergence totale $\partial_\mu J^\mu$. Est-ce que J^μ est invariant de jauge ?