Épreuve

Exercice 1 : Désintégration $h \to \gamma\gamma$
Dans le modèle standard, l'élément de matrice pour la désintégration d'un boson de Higgs (un champ scalaire réel) dans deux photons est donné par

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = G \left(k_\lambda p^\lambda \, g^{\mu\nu} - k^\mu p^\nu\right) \varepsilon^*_\mu(p)\varepsilon^*_\nu(k)\,.$$

Ici G est une constante de dimension de masse -1 et k et p sont les impulsions des photons avec polarisations $\varepsilon(k)$ et $\varepsilon(p)$.

1. Vérifiez que cette expression satisfait l'identité de Ward.
2. Calculez la largeur $\Gamma(h \to \gamma\gamma)$ en fonction de G et de la masse m_h du boson de Higgs.

   Indication : Vous devriez trouver

$$\Gamma(h \to \gamma\gamma) = \frac{|G|^2 m_h^3}{64\pi}\,.$$

Exercice 2 : Spineurs
Soit ψ un champ de Dirac,

$$\psi(x) = \sum_{s=+,-} \int \widetilde{\mathrm{d}p} \left(a_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx} + b_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{ipx}\right)\,.$$

Dans un référentiel de Lorentz fixe, on définit l'opérateur d'impulsion $\vec{P}$ par

$$P^j = \frac{i}{2}\int \mathrm{d}^3x \Big(\psi(x)^\dagger \partial^j \psi(x) - (\partial^j \psi(x)^\dagger)\psi(x)\Big) \qquad (j = 1,\, 2,\, 3)\,.$$

Montrez que $a_s^\dagger(\vec{k})|0\rangle$ est un état propre de $\vec{P}$ et calculez sa valeur propre.
Rappel : Les spineurs de base $u_s(\vec{p})$ vérifient l'identité (voir exercice 10.3.2)

$$\bar{u}_s(\vec{k})\gamma^0 u_r(\vec{k}) = 2\,k^0\,\delta_{sr}\,.$$

Exercice 3 : Matrices de Dirac
On rappelle que $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ et que $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ (voir exercice 9.2.3).

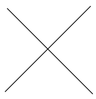
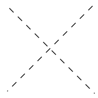
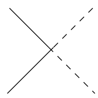
1. Pour un spineur de Dirac ψ de masse $m = 0$, montrez que le lagrangien est invariant par la transformation $\psi \to e^{i\beta\gamma^5}\psi$, où β est une constante réelle. Donnez le courant de Noether J^μ correspondant à cette symétrie.
2. Avec l'expression de J^μ de la partie 1., calculez explicitement $\partial_\mu J^\mu$ pour un spineur de Dirac de masse $m \neq 0$ (utilisez les équations de mouvement pour simplifier le résultat).

Exercice 4 : Théorie ϕ^4 avec deux scalaires

On regarde une théorie de deux champs scalaires réels ϕ et χ, de masse m_ϕ et m_χ respectivement, avec un lagrangien classique dépendant de trois couplages λ_ϕ, λ_χ et $\lambda_{\phi\chi}$:

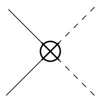
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 - \frac{\lambda_\phi}{24}\phi^4 - \frac{\lambda_\chi}{24}\chi^4 - \frac{\lambda_{\phi\chi}}{4}\phi^2\chi^2\,.$$

On représente les propagateurs de Feynman de ϕ par des lignes solides et ceux de χ par des lignes interrompues. Dans cette théorie il y a trois vertex différents dont les règles de Feynman dans l'espace des impulsions sont

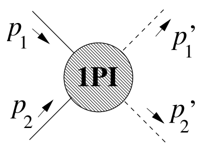
 $= -i\lambda_\phi\,,$  $= -i\lambda_\chi\,,$  $= -i\lambda_{\phi\chi}\,.$

1. Cette théorie est-elle renormalisable ? Pourquoi / pourquoi pas ?
2. Tracez tous les diagrammes connexes de Feynman qui contribuent à la diffusion $\phi\phi \to \chi\chi$ au niveau de l'arbre. (On labellise les particules dans l'état initial par leurs impulsions p_1 et p_2, et de même pour les particules dans l'état final avec impulsions p_1' et p_2'.)
3. Tracez les quatre diagrammes de Feynman amputés qui contribuent à ce processus au niveau d'une boucle. Pour chaque diagramme, indiquez s'il est irréductible à une particule (1PI) ou non, et donnez le facteur de symétrie et l'expression algébrique du diagramme dans l'espace des impulsions.

En théorie des perturbations renormalisée, on introduit un contre-terme

 $= -i\delta_{\lambda\phi\chi}$

et on définit le couplage physique $\lambda_{\phi\chi}$ par la condition de renormalisation



$= -i\lambda_{\phi\chi}$ pour $p_1 = p_2 = (m_\phi, \vec{0}),\ \vec{p_1}' = -\vec{p_2}'\,.$

Ici la figure désigne une somme sur tous les diagrammes 1PI, les masses sont les masses physiques et on suppose que $m_\phi > m_\chi$.

4. Pour $p_1 = p_2 = (m_\phi, \vec{0})$ et $\vec{p_1}' = -\vec{p_2}'$, exprimez les paramètres de Mandelstam s, t et u en fonction des masses.
5. Calculez $\delta_{\lambda\phi\chi}$ au niveau d'une boucle en régularisation dimensionnelle. (Vous pouvez utiliser les résultats du cours sans preuve et sans récopier les détails des calculs. Il n'y a pas besoin d'évaluer les intégrales sur les paramètres de Feynman.)