Épreuve

Exercice 1 : Dualité électrique-magnétique

L'action de l'électrodynamique classique sans sources est $S_1[F] = \int \mathrm{d}^4x \, \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$, où $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique et contraint par l'identité de Bianchi $\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0$ avec $\widetilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$. D'habitude on résout cette contrainte par l'introduction d'un champ de jauge A_μ, mais ici on va regarder $F_{\mu\nu}$ comme variable de champ fondamentale.

1. On regarde l'action

$$S_2[F,B] = \int \mathrm{d}^4x \, \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - B_\mu \partial_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu}\right)$$

   où $F_{\mu\nu}(x)$ est un tenseur antisymétrique sans contraintes et $B_\mu(x)$ est un deuxième champ. Montrez qu'elle est équivalente, au niveau classique, à l'action $S_1[F]$ avec l'identité de Bianchi. Donnez l'équation de mouvement pour $F_{\mu\nu}$ qui résulte de S_2 et montrez qu'elle peut s'écrire $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

2. Au niveau quantique, trouvez un changement de variables dans l'expression de S_2 qui permet d'évaluer l'intégrale de chemin (gaussienne) sur F :

$$\int \mathcal{D}B \, \mathcal{D}F \, e^{iS_2[B,F]} = N \int \mathcal{D}B \, e^{iS_3[B]} \, .$$

   Ici N est une constante. Donnez l'expression de $S_3[B]$.

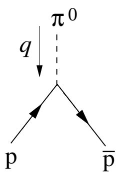
Indication : $\quad \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = 2\,\delta^\kappa_\rho\delta^\lambda_\sigma - 2\,\delta^\kappa_\sigma\delta^\lambda_\rho \, . \qquad (\star)$

Exercice 2 : Désintégration du pion

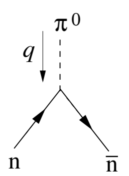
Pour décrire la physique des hadrons à basse énergie, on peut employer un lagrangien effectif où les couplages entre le pion neutre π^0 (assimilé à un scalaire réel de masse m_{π^0}) et les nucléons p et n (assimilés à des spineurs de Dirac de masse m_p et m_n) sont donnés par

$$\mathcal{L}_{\pi^0\overline{N}N} = -\frac{1}{2}\frac{g_A}{f_\pi}(\partial_\mu\pi^0)\left(\overline{\mathrm{p}}\gamma^\mu\gamma^5\mathrm{p} - \overline{\mathrm{n}}\gamma^\mu\gamma^5\mathrm{n}\right) \, .$$

Ici $g_A \approx 1.3$, $f_\pi \approx 93$ MeV et $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. On en obtient les vertex (avec $q^\mu =$ l'impulsion du pion)



$= \dfrac{1}{2}\dfrac{g_A}{f_\pi}\not{q}\gamma^5$



$= -\dfrac{1}{2}\dfrac{g_A}{f_\pi}\not{q}\gamma^5 \, .$

1. Les termes d'interaction dans $\mathcal{L}_{\pi^0\bar{N}N}$ sont-ils renormalisables ? Justifiez votre réponse.
2. Par rapport aux interactions électromagnétiques, le proton est similaire à un positron alors que le neutron est neutre. Tracez les deux diagrammes à l'ordre le plus bas en théorie des perturbations qui contribuent à la désintégration $\pi^0 \to \gamma\gamma$ et donnez l'expression correspondante de $\mathcal{M}_\mathrm{fi}$. (Il n'est pas demandé d'évaluer les intégrales.)
3. Un calcul plus précis dans le modèle des quarks donne

$$\mathcal{M}_\mathrm{fi}(\pi^0 \to \gamma\gamma) = -\frac{e^2}{4\pi^2 f_\pi}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}k_\mu\varepsilon^*_\nu(k)k'_\kappa\varepsilon'^*_\lambda(k')$$

avec k^μ et k'^μ les impulsions des deux photons et ε^μ et ε'^μ leurs polarisations. Vérifiez que cette expression satisfait l'identité de Ward.

4. Avec cette dernière expression pour $\mathcal{M}_{\text{fi}}$, calculez la largeur de désintégration $\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma)$ en fonction de f_π, e et m_{π^0}.

   Indications : Utilisez l'identité ($\star$). Il faudra prendre la somme sur les polarisations des photons ; pour ce faire on remplace

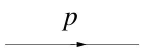
$$\sum_\varepsilon \varepsilon_\mu(k)\varepsilon^*_\nu(k) \;\to\; -g_{\mu\nu}\,.$$

Exercice 3 : Renormalisation de la théorie de Yukawa

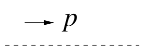
On rappelle le lagrangien classique de la théorie de Yukawa :

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m}{2}\phi^2 - y\,\phi\overline{\psi}\psi - \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi)\,,$$

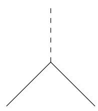
où y est un couplage adimensionnel et $\mathcal{V}_{\text{int}}(\phi)$ contient des termes d'auto-interaction ϕ^3 et ϕ^4 que l'on va négliger ici. Les règles de Feynman sont



$$= \frac{i(p\!\!\!/ + M)}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \qquad \text{pour le propagateur du fermion}\,,$$

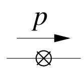


$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \qquad \text{pour le propagateur du scalaire}\,,$$

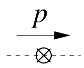


$$= -iy \qquad \text{pour le vertex}\,.$$

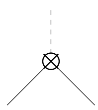
En théorie des perturbations renormalisée, on introduit des contre-termes avec ses règles de Feynman, dont



$$= i(p\!\!\!/\delta_2 - \delta_M)$$



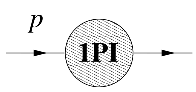
$$= i(p^2\delta_3 - \delta_{m^2})$$



$$= -i\delta_y$$

1. Tracez tous les diagrammes 1PI (irréductibles à une particule) qui contribuent à la fonction à trois points $\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\overline{\psi}(y)\psi(z)|0\rangle$ à l'ordre $\leq y^3$.
2. Calculez δ_2 à une boucle en régularisation dimensionnelle. Il n'y a pas besoin d'évaluer les intégrales sur les paramètres de Feynman.

   Indications : Comme dans l'électrodynamique quantique, on définit $\Sigma(p\!\!\!/)$ par la somme des diagrammes 1PI avec deux fermions externes (dont on ne compte pas les propagateurs)



$$= -i\Sigma(p\!\!\!/)\,,$$

   et on pose la condition de renormalisation $\frac{d}{dp\!\!\!/}\Sigma(p\!\!\!/)\Big|_{p\!\!\!/=M} = 0$.