

ÉPREUVE

Exercice 1 : Parité

La *transformation de parité* agit sur les vecteurs de Lorentz comme suit :

$$x \rightarrow \mathcal{P}x, \quad (\mathcal{P}_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Est-ce qu'il s'agit d'une transformation de Lorentz ? Si oui, est-elle propre et/ou orthochrone ? Justifiez vos réponses.
2. L'action de parité sur les spineurs de Dirac et le photon est

$$\psi(x) \rightarrow B\psi(\mathcal{P}x), \quad A^\mu(x) \rightarrow \mathcal{P}_\nu^\mu A^\nu(\mathcal{P}x)$$

où $B = \gamma^0$ dans la représentation de Weyl des matrices γ . Trouvez la transformation des bilinéaires $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ et de l'opérateur ∂_μ .

3. Dédisez-en que l'action de l'électrodynamique quantique est invariante par parité.

Exercice 2 : Théorie ϕ^3

On regarde une théorie d'un champ scalaire réel ϕ avec le lagrangien classique

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{6}\phi^3.$$

On rappelle que la théorie contient un vertex à trois points avec la règle de Feynman



$$= g.$$

1. Est-ce que cette théorie est renormalisable ? Pourquoi/pourquoi pas ?
2. Tracez tous les diagrammes connexes de Feynman au niveau de l'arbre qui contribuent à la fonction à quatre points. Donnez l'expression de l'élément de matrice $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ pour la diffusion $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ à l'ordre g^2 .
3. Tracez tous les diagrammes connexes de Feynman au niveau d'une boucle qui contribuent à la fonction à un point $\langle 0|\phi(x)|0\rangle$. Déterminez-en le facteur de symétrie et donnez l'expression algébrique de la fonction à un point. Est-ce qu'elle est divergente ? Introduisez un contre-terme δ_1 , posez une condition de renormalisation appropriée et calculez l'expression de δ_1 à une boucle en régularisation dimensionnelle.
4. Tracez tous les diagrammes connexes de Feynman au niveau d'une boucle qui contribuent à la fonction à quatre points et qui sont irréductibles à une particule (1PI). Choisissez un parmi ces diagrammes et donnez l'expression algébrique correspondante dans l'espace des impulsions. Est-ce qu'elle est divergente ?

Indications : Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes. Ignorez le fait que le hamiltonien classique de cette théorie ne possède pas de borne inférieure.

Exercice 3 : Electrodynamique quantique avec champs fantômes

Dans cet exercice on étudiera de nouveau la méthode de Fadeev-Popov dans le but de quantifier le photon par l'intégrale de chemin. L'action classique est celle de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

et on considère la classe de conditions de jauge $G(A) = 0$ avec

$$G(A) = \partial_\mu A^\mu + \sigma A_\mu A^\mu - \omega$$

où σ est une constante réelle (en cours on avait traité le cas $\sigma = 0$) et ω est une fonction réelle.

1. Donnez l'expression formelle du déterminant de Fadeev-Popov

$$\Delta_{\text{FP}} = \det \frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha}.$$

Ici $A_\mu^{(\alpha)}$ est lié au quadri-potentiel de référence A_μ par une transformation de jauge paramétrée par $\alpha(x)$. Exprimez le résultat en fonction de A_μ , de σ et des opérateurs différentiels. (Vous pouvez supprimer tout terme $\mathcal{O}(|\alpha|^2)$.)

2. Soit $c(x)$ un champ scalaire complexe *grassmannien*. En vue du résultat du cours de l'intégrale gaussienne pour les variables grassmanniennes,

$$\int d^n \theta^* d^n \theta e^{-\theta^\dagger A \theta} = \det A,$$

montrez que l'intégrale de chemin du photon peut s'écrire avec un paramètre réel ξ' comme

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} &\propto \int \mathcal{D}c^\dagger \int \mathcal{D}c \int \mathcal{D}A e^{iS[A, c, c^\dagger]}, \\ S[A, c, c^\dagger] &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}} \right), \\ \mathcal{L}_{\text{gf}} &= -\frac{1}{2\xi'} (\partial_\mu A^\mu + \sigma A_\mu A^\mu)^2, \quad \mathcal{L}_{\text{ghost}} = c^\dagger (\square + 2\sigma A_\mu \partial^\mu) c. \end{aligned}$$

Le champ c s'appelle champ *fantôme*. Selon le théorème spin-statistique qui implique que les scalaires physiques sont toujours des bosons, c ne peut pas représenter une particule physique. Les fantômes doivent être pris en compte dans les diagrammes de Feynman de la QED si on choisit une jauge où $\sigma \neq 0$, mais ils ne figurent que dans les lignes internes.

3. Déduisez de $\mathcal{L}_{\text{ghost}}$ les expressions du propagateur du champ fantôme et du vertex fantôme-antifantôme-photon dans l'espace d'impulsions (pas de calcul détaillé requis). Qu'est-ce que la différence avec le propagateur d'un champ scalaire complexe ordinaire sans masse ?

Indications : La troisième partie de cet exercice peut se faire sans avoir fait les deux autres. Pour rappel, le facteur i dans l'exposant de e^{iS} provient de la rotation de Wick, $\int dt d^3x \rightarrow i \int d\tau d^3x$ (il n'est pas demandé de le dériver en détail).