HMPH316 Théorie quantique des champs — S2 M2 Cosmos, Champs et Particules
Faculté des sciences de Montpellier — 2020/21 — F. Brümmer

Épreuve

Exercice 1 : Identité de Gordon

Donnez $\bar{u}(\vec{p})(\not{p} - m)$ et $(\not{p} - m)u(\vec{p})$. Ensuite montrez que

$$\bar{u}(\vec{p}\,')\gamma^\mu u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}\,')\left(\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\gamma^{\mu\nu}q_\nu}{m}\right)u(\vec{p})$$

avec $q = p' - p$.

Exercice 2 : QED scalaire

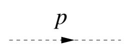
On rappelle que le lagrangien d'un champ scalaire complexe libre

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi) - m^2\,|\phi|^2$$

est invariant par la transformation $\phi \to \phi e^{ie\alpha}$ avec α constant, le courant de Noether étant donné par $J^\mu = i\left((\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger\partial^\mu\phi\right)$. On ajoute maintenant un champ de jauge A_μ et on souhaite que la transformation ci-dessus soit une symétrie de la théorie qui en résulte, même si α n'est pas constant mais une fonction de l'espace-temps.

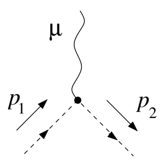
1. Donnez l'expression du lagrangien (y compris le terme cinétique pour A_μ).

On rappelle que le propagateur du champ scalaire complexe est

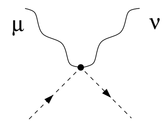


$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\,.$$

De plus dans cette théorie il y a deux vertex dont les règles de Feynman sont, en fonction du couplage e,



$$= -ie(p_1^\mu + p_2^\mu)\,,$$



$$= 2\,ie^2 g^{\mu\nu}\,.$$

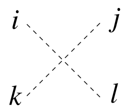
2. Tracez tous les diagrammes de Feynman à une boucle qui contribuent à la renormalisation du propagateur du photon. Donnez les expressions algébriques des diagrammes amputés (sans les évaluer).
3. Donnez l'élément de matrice $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ pour la diffusion $\phi\gamma \to \phi\gamma$ dans l'espace d'impulsions au niveau de l'arbre (attention, il y a plusieurs diagrammes qui y contribuent). On désignera par p (p') l'impulsion du photon incident (émergent) et par q ($q' = p + q - p'$) celle du scalaire incident (émergent).
4. On supposera que les photons incidents et émergents ne sont pas polarisés. Donnez l'expression de $|\overline{\mathcal{M}}_{\text{fi}}|^2$ (la barre indiquant qu'il faut prendre la somme/la moyenne des polarisations de façon appropriée).

Exercice 3 : Modèle O(N) et transformation de Hubbard-Stratonovich

Une variante du *modèle O(N)* contient N champs scalaires réels $\phi_i(x)$ avec le lagrangien

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{\lambda}{4\,N}\left(\sum_{i=1}^{N} \phi_i^2\right)^2 .$$

1. Montrez que $\mathcal{L}_\phi$ est invariant par la transformation $\phi_i \to \phi_i + \sum_j R_{ij}\phi_j + \mathcal{O}(||R||^2)$ pour R une matrice $N \times N$ antisymétrique. Y a-t-il d'autres termes renormalisables qui sont aussi invariants et qui manquent dans $\mathcal{L}_\phi$?
2. Donnez la règle de Feynman pour le vertex à quatre scalaires



dans l'espace d'impulsions (pas de justification détaillée nécessaire).

On introduit un champ scalaire $\sigma(x)$ dit *champ auxiliaire* et le lagrangien

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{1}{2\sqrt{N}}\sigma \sum_{i=1}^{N} \phi_i^2 + \frac{1}{4\,\lambda}\sigma^2$$

3. Qu'est-ce qui semble manquer dans $\mathcal{L}_\sigma$? Donnez la dimension de masse de σ.
4. Montrez que $\mathcal{L}_\sigma$ est équivalent à $\mathcal{L}_\phi$ au niveau classique (les équations de mouvement pour les ϕ_i sont les mêmes si on prend en compte celle de σ).
5. Montrez que les théories sont équivalentes au niveau quantique, c.-à.-d. les fonctionnelles génératrices sont les mêmes à une constante près :

$$\int \mathcal{D}\sigma \int \left(\prod_{i=1}^{N} \mathcal{D}\phi_i\right) e^{i\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\sigma + i\sum_i \int \mathrm{d}^4x\,\phi_i J_i} \propto \int \left(\prod_{i=1}^{N} \mathcal{D}\phi_i\right) e^{i\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\phi + i\sum_i \int \mathrm{d}^4x\,\phi_i J_i}$$

6. En d dimensions, avec $S_\sigma[\phi_i, \sigma] = \int \mathrm{d}^d x\,\mathcal{L}_\sigma$, évaluez l'intégrale fonctionnelle sans sources sur les ϕ_i avec l'approximation du point col,

$$\int \mathcal{D}\phi\; e^{iS[\phi]} \approx \left(\det\left(-\frac{\delta^2 S}{\delta\phi^2}\right)\right)^{-1/2} e^{iS[\phi_0]} \qquad \text{avec } \phi_0 \text{ donné par } \left.\frac{\delta S}{\delta \phi}\right|_{\phi=\phi_0} = 0$$

   afin d'obtenir une expression de l'action effective (non locale) pour σ seul.
7. Pour ce dernier résultat, après un changement de variables $\sigma \to \tilde{\sigma} = \sigma/\sqrt{N}$, donnez un argument pourquoi l'approximation du point col devient exacte dans la limite $N \to \infty$. Pour $\tilde{\sigma}(x) = \tilde{\sigma}_0$ constant, montrez que la valeur de $\tilde{\sigma}_0$ au point col est donnée implicitement par

$$\tilde{\sigma}_0 = \lambda \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\frac{i}{k^2 - \tilde{\sigma}_0}\,.$$

   En déduisez la valeur de $\tilde{\sigma}_0$ en fonction de d en régularisation dimensionnelle.

Indications : Pour un opérateur $\mathcal{O}$, on a $\log\det\mathcal{O} = \mathrm{Tr}\log\mathcal{O}$. Pour une fonction F, on a

$$\mathrm{Tr}\,F(\Box) = (VT)\int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} F(-k^2) \qquad \text{où } (VT) = \delta^{(d)}(0)\,.$$