

ÉPREUVE

Exercice 1 : Champ scalaire complexe

On regarde un champ scalaire complexe classique $\phi(t, \vec{x})$ avec l'action

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2 - \frac{\lambda}{4} |\phi|^4.$$

1. Donnez les équations de mouvement pour ϕ et ϕ^* .
2. Donnez les moments conjugués π_ϕ et π_{ϕ^*} de ϕ et ϕ^* . Écrivez la densité hamiltonienne $\mathcal{H}$ en fonction de π_ϕ et π_{ϕ^*} , de ϕ et ϕ^* et de leurs gradients spatiales.
3. Les *équations de de Hamilton* sont les deux équations

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\phi} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\vec{\nabla} \pi_\phi)}, \quad \dot{\pi}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\vec{\nabla} \phi)}$$

et leurs conjuguées complexes. Montrez qu'elles impliquent les équations de mouvement de 1.

Exercice 2 : Parité

Soit $\phi(t, \vec{x})$ un champ scalaire réel quantique libre et $a(\vec{p})$ et $a^\dagger(\vec{p})$ les opérateurs d'annihilation et de création associés. On définit

$$\Pi = \frac{\pi}{2} \int d\vec{k} \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) - a^\dagger(\vec{k}) a(-\vec{k}) \right).$$

1. L'opérateur Π est-il hermitien ?
2. Calculez $[\Pi, a(\vec{p})]$, $[\Pi, a^\dagger(\vec{p})]$ et $[\Pi, H]$, où H est le hamiltonien.
3. Montrez que

$$[\Pi, \phi(t, \vec{x})] = \frac{\pi}{2} \left(\hat{\phi}(t, \vec{x}) - \hat{\phi}(t, -\vec{x}) \right), \quad \text{où} \quad \hat{\phi}(t, \vec{x}) \equiv \int d\vec{p} \left(a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} - a(\vec{p}) e^{-ipx} \right).$$

En notant que $\hat{\hat{\phi}} = \phi$, déduisez-en les expressions de

$$\underbrace{[\Pi, [\Pi, \dots, [\Pi, \phi(t, \vec{x})]]]}_{n \text{ commutateurs}}$$

pour $n \geq 2$ pair et n impair, en fonction de ϕ et $\hat{\phi}$. Enfin, calculez $e^{i\Pi} \phi(t, \vec{x}) e^{-i\Pi}$ avec la formule de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots + \frac{1}{n!} \underbrace{[A, [A, \dots, [A, B]]]}_{n \text{ commutateurs}} + \dots$$

Simplifiez votre résultat autant que possible.

Exercice 3 : Propagateur du photon dans la jauge R_ξ

La densité lagrangienne d'un photon A_μ couplé à une source J^μ peut s'écrire, dans une jauge appelée *jauge* R_ξ ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - A_\mu J^\mu.$$

Ici ξ est un paramètre réel et $F_{\mu\nu}$ est le champ électromagnétique habituel. On définit la fonctionnelle génératrice comme d'habitude par l'intégrale de chemin sur A :

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp(i S[A, J]), \quad S[A, J] = \int d^4x \mathcal{L}.$$

1. Écrivez l'action dans la forme

$$S[A, J] = \frac{1}{2} \int d^4x \left(A_\mu(x) D^{\mu\nu} A_\nu(x) - 2 A_\mu(x) J^\mu(x) + (\text{divergence totale}) \right),$$

où $D^{\mu\nu}$ est un opérateur différentiel approprié dépendant de ξ .

2. Trouvez l'inverse de l'opérateur $D^{\mu\nu}$ dans l'espace de Fourier. Utilisez votre résultat pour écrire $Z[J]$ dans la forme

$$Z[J] = Z[0] \times (\text{une fonctionnelle qui n'implique pas d'intégrale de chemin}).$$

Indication : qu'est-ce qu'on obtient quand on simplifie l'expression

$$\left(-k^2 g^{\mu\nu} + \frac{\xi - 1}{\xi} k^\mu k^\nu \right) (-k^2 g_{\nu\lambda} - (\xi - 1) k_\nu k_\lambda) ?$$

3. Déduisez-en une représentation intégrale de la fonction à deux points du photon $\langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle$ dans la jauge R_ξ , analogue à celle du propagateur de Feynman pour un champ scalaire.