Épreuve

Exercice 1 : Champ scalaire classique conforme

Soit ϕ un champ scalaire classique de masse $m = 0$ avec un terme d'interaction ϕ^4 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{24}\phi^4\,.$$

Ici $\lambda > 0$ est une constante de couplage.

1. Donnez l'équation de mouvement.
2. On regarde la transformation continue

$$\phi(x) \;\to\; \phi'(x) = e^{-\alpha\Delta}\phi(e^{-\alpha}x)$$

   paramétrée par $\alpha \in \mathbb{R}$, avec Δ une constante. Comment faut-il choisir Δ pour que l'action $S[\phi]$ soit invariante ?
   (*Indication* : il convient de faire un changement de variable $y = e^{-\alpha}x$.)
3. Montrez que, avec ce choix de Δ, la variation de ϕ peut s'écrire comme $\delta\phi(x) = -\phi(x) - x^\mu\partial_\mu\phi(x)$. De même, on peut montrer (pas demandé ici) que $\delta\mathcal{L} = -(x^\mu\partial_\mu + 4)\mathcal{L}$. Utilisez ces résultats pour calculer le courant de Noether J^μ. Vérifiez explicitement que J^μ est conservé.

Exercice 2 : Champ scalaire quantique libre

Soit ϕ maintenant un champ scalaire quantique libre. On rappelle l'expression du hamiltonien (après soustraction de l'énergie du vide),

$$H = \int \widetilde{\mathrm{d}k}\;\omega_{\vec{k}}\,a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})\,.$$

1. Montrez que $|p\rangle = a^\dagger(\vec{p})|0\rangle$ est un état propre de H et calculez sa valeur propre.
2. Calculez $[H, \phi(x)]$ et montrez que $i[H, \phi(x)] = \dot{\phi}(x)$.
3. Avec $|x\rangle = \phi(x)|0\rangle$, calculez $\langle x|p\rangle$.

Exercice 3 : Champs scalaires libres euclidiens en dimension zéro

Soit A une matrice $n\times n$ réelle, symétrique et régulière avec valeurs propres positives. Pour rappel,

$$\int \mathrm{d}^n x\;\exp\left(-\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,(\det A)^{-\frac{1}{2}}\;.$$

La fonction

$$P(\vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det A)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j\right)$$

est donc normalisée ; vu qu'elle est aussi définie positive, on peut l'interpréter comme loi de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. On définit la moyenne d'une fonction $f(\vec{x})$ quelconque comme d'habitude :

$$\langle f(\vec{x})\rangle = \int \mathrm{d}^n x \; f(\vec{x}) P(\vec{x})\,.$$

1. Construisez une *fonction génératrice* $Z(\vec{J}\,)$ qui vérifie

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial J_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial J_{i_k}} Z(\vec{J}\,)\right)\Bigg|_{\vec{J}=0}\,.$$

   Évaluez l'intégrale sur $\vec{x}$ dans $Z(\vec{J}\,)$ pour obtenir une expression sans intégrales.

2. Calculez $\langle x_i x_j\rangle$, $\langle x_i x_j x_k\rangle$ et $\langle x_i x_j x_k x_\ell\rangle$ et exprimez les résultats en fonction des éléments de la matrice A^{-1}.
3. Qu'est-ce qu'on obtiendra pour $\langle x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}\rangle$? (Pas de justification requise.)