Épreuve

Exercice 1 : Champ scalaire libre

Soit $\phi(x) = \phi(t, \vec{x})$ un champ scalaire quantique réel libre de masse m.

1. Donnez l'expression du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ en fonction de ϕ et de ses dérivées. Montrez explicitement que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, sachant que ϕ vérifie l'équation de Klein-Gordon.
2. On définit les opérateurs de création $a^\dagger(\vec{k})$ et d'annihilation $a(\vec{k})$ comme d'habitude :
$$\phi(x) = \int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \left(a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right)\Big|_{k^0 = \sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2}}$$
Avec $|x\rangle = \phi(x)|0\rangle$ et $|k\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$, où $|0\rangle$ est le vide, calculez $\langle k|x\rangle$ (simplifiez votre résultat autant que possible).
3. Soit H le hamiltonien. Montrez que
$$e^{iHt}\phi(0, \vec{0})e^{-iHt} = \phi(t, \vec{0})\,.$$
Indications : Avec l'expression connue pour H en fonction des a et $a^\dagger$, calculez $\left[iHt, a(\vec{k})\right]$ et $\left[iHt, a^\dagger(\vec{k})\right]$; puis utilisez la formule de Baker-Campbell-Hausdorff :
$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \ldots + \frac{1}{n!}\underbrace{[A, [A, \ldots, [A, B]]]}_{n \text{ commutateurs}} + \ldots$$

Exercice 2 : Intégrale de chemin pour un champ complexe

Soit ϕ un champ scalaire complexe libre de masse m. Démontrez que la fonctionnelle génératrice, définie en fonction de la source complexe $J(x)$ comme

$$Z[J, J^*] \equiv \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\, \exp\left(i \int d^4x\, (\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2|\phi|^2 + J^*\phi + \phi^* J) \right)\,,$$

vérifie l'équation

$$Z[J, J^*] = Z[0, 0]\exp\left(-\int d^4x\, d^4x'\, J^*(x)\, D_F(x - x')\, J(x') \right).$$

Déduisez-en les fonctions de correlation $\langle 0|\phi(x)|0\rangle$ et $\langle 0|\mathrm{T}\phi^\dagger(x)\phi(y)|0\rangle$.

Exercice 3 : Théorie ϕ^4 et équations de Schwinger-Dyson

On regarde un champ scalaire réel avec le lagrangien classique

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{24}\phi^4$$

où m^2 et λ sont des paramètres positifs de dimension 2 et 0 respectivement.

1. Donnez l'équation de mouvement classique pour ϕ.

On peut montrer que les fonctions de correlation dans la théorie quantique vérifient certains identités connues sous le nom d'*équations de Schwinger-Dyson*, dont

$$\begin{aligned}(\Box_z + m^2)\langle 0|\mathrm{T}\phi(z)\phi(y)|0\rangle &= -i\delta^{(4)}(z-y) - \frac{\lambda}{6}\langle 0|\mathrm{T}\phi(z)^3\phi(y)|0\rangle\,, \\ (\Box_u + m^2)\langle 0|\mathrm{T}\phi(z)^3\phi(u)|0\rangle &= -3i\delta^{(4)}(z-u)\langle 0|\phi(z)^2|0\rangle + \mathcal{O}(\lambda)\,.\end{aligned}$$

2. Utilisez les équations de Schwinger-Dyson pour calculer la fonction à deux points $\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ en théorie des perturbations à l'ordre $\leq \lambda$. Exprimez votre résultat en fonction de λ et du propagateur de Feynman D_F.
   Indications : Un point de départ convenient est d'écrire

   $$\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \mathrm{d}^4z\ \delta^{(4)}(x-z)\langle 0|\mathrm{T}\phi(z)\phi(y)|0\rangle$$

   et d'exploiter que iD_F est une fonction de Green pour l'opérateur de Klein-Gordon, afin de faire apparaître ce dernier. Votre résultat final devrait correspondre à celui du cours obtenu avec des diagrammes de Feynman. Vous pouvez ignorer le fait que la contribution à l'ordre λ est formellement divergente à cause du facteur $D_F(0)$.