Épreuve

Exercice 1 : Champ scalaire complexe classique

Soit $\phi(x) = \phi(t, \vec{x})$ un champ scalaire complexe classique avec la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^* \phi)^2 \,.$$

1. Donnez les équations de mouvement pour ϕ et ϕ^*.
2. Donnez l'expression du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ et montrez qu'il est symétrique.
3. Comment sont définis les moments conjugués $\pi(t, \vec{x})$ et $\pi^*(t, \vec{x})$? Exprimez la densité hamiltonienne T^{00} en fonction de ϕ et ϕ^*, de leurs gradients spatiaux $\vec{\nabla}\phi$ et $\vec{\nabla}\phi^*$ et de π et π^*. Donnez l'expression de l'hamiltonien H.
4. On quantifie maintenant la théorie en imposant les relations de commutation canoniques. Montrez que celles-ci impliquent l'équation de Heisenberg :

   $$\dot{\phi}(t, \vec{x}) = i[H(t), \phi(t, \vec{x})] \,.$$

   (Dans ce calcul, précisez à chaque étape comment les champs dépendent de l'espace et du temps.)

Exercice 2 : Propagateur de Feynman

On définit le propagateur de Feynman pour un champ scalaire réel libre par

$$D_F(x - y) = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \,.$$

1. Montrez directement, à partir de cette définition et sans passer à une représentation intégrale, que

   $$(\Box_x + m^2) D_F(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y) \,.$$

   Indication : Montrez d'abord que, au sens des distributions (c.-à-d. après convolution avec une fonction test appropriée) on a

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta(t - u) = \delta(t - u) \,.$$

2. Pour rappel, D_F peut aussi s'écrire

   $$D_F(x - y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)}$$

   où la courbe $\mathcal{C}$ contourne le pôle à $p^0 = -\omega_{\vec{p}} = -\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$ par dessous et celui à $p^0 = \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$ par dessus dans le plan complexe.

On définit un autre propagateur $D_{\overline{F}}(x-y)$ par la même expression mais avec la courbe $\overline{\mathcal{C}}$ qui contourne le pôle à $p^0 = \omega_{\vec{p}}$ par dessous et celui à $p^0 = -\omega_{\vec{p}}$ par dessus. Écrivez $D_{\overline{F}}$ en fonction de $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$, de $\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$ et des fonctions Θ (justifiez votre résultat).

Exercice 3 : Intégrale de chemin en mécanique quantique

On considère un oscillateur harmonique en mécanique quantique. Le hamiltonien est

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}\hat{q}^2 \,.$$

Utilisez l'expression connue de l'amplitude de persistence du vide en présence d'une source,

$$\langle 0|0\rangle_j = \exp\left(-\frac{1}{4\omega}\int \mathrm{d}t\ \mathrm{d}t'\ j(t)e^{-i\omega|t-t'|}j(t')\right)\,,$$

pour calculer les fonctions à deux points $\langle 0|\mathrm{T}\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|0\rangle$, à trois points $\langle 0|\mathrm{T}\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_3)|0\rangle$ et à quatre points $\langle 0|\mathrm{T}\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_3)\hat{q}(t_4)|0\rangle$.