

ÉPREUVE

Exercice 1 : Énergie et impulsion

On regarde un champ scalaire réel $\phi(x)$ qui vérifie

$$\phi(x) = e^{iPx} \phi(0) e^{-iPx},$$

$P^\mu = T^{0\mu}$ étant le générateur des quadri-translations, avec $P^0 = H$ le hamiltonien. Ce dernier est défini d'inclure une constante telle que $P^\mu |0\rangle = 0$.

1. Montrez que le champ ϕ vérifie l'équation de Heisenberg

$$\dot{\phi} = i[H, \phi].$$

2. Montrez que

$$P_j |\phi(x)\rangle = -i \frac{\partial}{\partial x^j} |\phi(x)\rangle \quad (j = 1, 2, 3)$$

où $|\phi(x)\rangle \equiv \phi(x)|0\rangle$.

3. Pour un champ scalaire libre de masse m , calculez $P_\mu |k\rangle$ avec $|k\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$.

Exercice 2 : Fonction à quatre points du champ scalaire libre

En cours on avait obtenu l'expression suivante pour la fonction à quatre points du champ scalaire libre, par le formalisme de la quantification par l'intégrale de chemin :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) | 0 \rangle &= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Supposons que $x_1^0 > x_2^0 > x_3^0 > x_4^0$. Calculez

$$\langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) | 0 \rangle$$

en quantification canonique (à partir des relations de commutation canoniques pour les opérateurs de création et d'annihilation) et comparez avec le résultat ci-dessus.

Indications : On rappelle que

$$D_F(x - y) = \int \widetilde{d}k e^{-ik(x-y)} \quad \text{si } x^0 > y^0.$$

On peut beaucoup accélérer le calcul si on supprime systématiquement, à chaque étape, les termes qui ne contribueront pas au résultat final.

Exercice 3 : Champ du photon dans la jauge de Feynman

On donne l'expression de la fonctionnelle génératrice pour le champ électromagnétique dans la *jauge de Feynman* :

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp(iS_J[A]) , \quad S_J[A] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + J_\mu A^\mu \right) .$$

Ici A_μ est le quadripotential, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le champ électromagnétique et J_μ est une source externe.

Déduisez-en la fonction à deux points du photon, $\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle$, dans cette jauge. Ecrivez le résultat en fonction du propagateur de Feynman avec $m = 0$,

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} .$$

Donnez également la fonction à trois points $\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)A_\lambda(z)|0\rangle$ et à quatre points $\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)A_\lambda(z)A_\kappa(u)|0\rangle$ (un calcul détaillé pour ces dernières n'est pas demandé ; justifiez toutefois brièvement les résultats).

Indications : Il convient de d'abord réécrire l'action classique dans la forme

$$S_J = \int d^4x (A_\mu D^{\mu\nu} A_\nu + J_\mu A^\mu) + (\text{termes de surface})$$

où $D^{\mu\nu}$ est un certain opérateur différentiel, et d'ensuite trouver l'inverse de $D^{\mu\nu}$ dans la représentation de Fourier.