Épreuve

Exercice 1 : Théorème de Noether

On considère une transformation de l'espace-temps

$$(t, x^i) \;\to\; (t, x^i + \epsilon^{ijk} x^j a^k) + \mathcal{O}(|\vec{a}|^2)\,, \qquad \vec{a} \in \mathbb{R}^3\,.$$

Pour rappel :

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation paire de } (123)\,, \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation impaire de } (123)\,, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

1. Montrez que, au premier ordre en $|\vec{a}|$, cette transformation est une transformation de Lorentz. Est-elle propre et/ou orthochrone ?
2. Sachant qu'un champ scalaire se transforme par une transformation de Lorentz Λ comme $\phi(x) \to \phi(\Lambda^{-1}x)$, montrez que la transformation du lagrangien peut s'écrire

$$\mathcal{L}(x) \;\to\; \mathcal{L}(x) - \partial_\mu \left(\epsilon^{\mu jk} x^j a^k \mathcal{L}(x)\right) + \mathcal{O}(|\vec{a}|^2)\,, \qquad \epsilon^{0jk} \equiv 0\,.$$

3. Puisque l'action est invariante par transformations de Lorentz, selon le théorème de Noether il y aura trois courants conservés J^i_μ correspondant aux trois composantes a^i. Pour le cas d'un champ scalaire libre, donnez l'expression de ces courants ainsi que l'expression des charges conservées. De quelle quantité physique s'agît-il ?

Exercice 2 : Quantité de mouvement

Soit ϕ un champ scalaire réel libre quantique. On définit les trois opérateurs P^i de *quantité de mouvement* par

$$\vec{P} = \int \mathrm{d}^3x\; \pi(t, \vec{x}) \vec{\nabla} \phi(t, \vec{x})\,.$$

1. Montrez que l'on peut écrire $\vec{P}$ en fonction des opérateurs de création et d'annihilation comme

$$\vec{P} = \int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \vec{k}\; a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})\,.$$

   Indication : $\int \mathrm{d}^3k\, f(\vec{k}) = 0$ pour toute fonction ou distribution impaire $f(\vec{k})$.
2. Montrez explicitement que l'état $a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$ est un état propre des opérateurs P^i et calculez les valeurs propres correspondantes.

Exercice 3 : Intégrale de chemin pour un champ scalaire libre complexe

Rappelons que, pour un champ scalaire complexe, il convient de traiter ϕ et $\phi^\dagger$ comme variables indépendantes. Par conséquent, dans le formalisme de l'intégrale de chemin on introduit une source complexe $J(x)$ et son conjugué $J^\dagger(x)$ et on définit la fonctionnelle génératrice par

$$Z[J,\, J^\dagger] = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\phi^\dagger \ \exp\left(iS[\phi,\, \phi^\dagger] + i\int \mathrm{d}^4x \ \left(J^\dagger\phi + \phi^\dagger J\right)\right) .$$

Pour le cas d'un champ scalaire complexe libre avec action

$$S[\phi,\, \phi^\dagger] = \int \mathrm{d}^4x \ \left(\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi\right)$$

écrivez la fonctionnelle génératrice comme

$$Z[J,\, J^\dagger] = Z[0,\, 0] \times (\text{une fonctionnelle de } J \text{ et } J^\dagger \text{ qui n'implique plus d'intégrale de chemin}) .$$

Déduisez-en les fonctions de correlation $\langle 0|\mathrm{T}\phi^\dagger(x)\phi(y)|0\rangle$ et $\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle$, qui pour rappel sont données par

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathrm{T}\phi^\dagger(x)\phi(y)|0\rangle =& \frac{1}{Z[0,\, 0]}\int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\phi^\dagger \ \phi^\dagger(x)\phi(y)\exp\left(iS[\phi,\, \phi^\dagger]\right) ,\\
\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle =& \frac{1}{Z[0,\, 0]}\int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\phi^\dagger \ \phi(x)\phi(y)\exp\left(iS[\phi,\, \phi^\dagger]\right) .
\end{aligned}$$