Épreuve

Exercice 1 : Énergie-impulsion des champs classiques

On rappelle que l'invariance de l'action par quadri-translations donne lieu à quatre densités de courant conservées constituant le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$. Pour une théorie impliquant les champs Φ_i on a

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \partial^\nu \Phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \,.$$

1. Montrez : Si $T^{\mu\nu}$ est conservé, alors

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda}$$

   l'est aussi, pourvu que le tenseur Σ vérifie $\Sigma^{\mu\nu\lambda} = -\Sigma^{\lambda\nu\mu}$.
2. Donnez l'expression de $T^{\mu\nu}$ pour l'électrodynamique classique sans sources,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,.$$

   Avec $\Sigma^{\mu\nu\lambda} = F^{\mu\lambda} A^\nu$, montrez que $\Theta^{\mu\nu}$ est symétrique et invariant de jauge.
3. Calculez les moments conjugués $\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}$. Qu'est-ce qu'on trouve notamment pour Π^0 ? Écrivez le hamiltonien $H = \Theta^{00}$ en fonction de Π^i et de F^{ij} (où $i, j = 1, 2, 3$).

Exercice 2 : Fonctions de correlation d'un champ scalaire libre complexe

Soit ϕ un champ scalaire libre complexe de masse m. On rappelle la décomposition en opérateurs de création et d'annihilation :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \widetilde{\mathrm{d}k} \left(a(\vec{k})\, e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k})\, e^{ikx} \right) \,, \\ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= 2\omega_{\vec{k}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] \,. \end{aligned}$$

Exprimez les fonctions de correlation

$$\langle 0| \,\mathrm{T}\, \phi^\dagger(x) \phi(y) |0\rangle$$

$$\langle 0| \,\mathrm{T}\, \phi(x) \phi(y) |0\rangle$$

$$\langle 0| \,\mathrm{T}\, \phi^\dagger(x) \phi^\dagger(y) \phi(z) |0\rangle$$

en fonction du propagateur de Feynman D_F, défini par

$$D_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) \int \widetilde{\mathrm{d}k}\; e^{-ik(x-y)} + \Theta(y^0 - x^0) \int \widetilde{\mathrm{d}k}\; e^{ik(x-y)} \,. \qquad (\star)$$

Exercice 3 : Propagateur conforme

On considère un champ scalaire libre réel sans masse. Le lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\,.$$

Partant de l'expression du cours pour le propagateur de Feynman (voir équation ($\star$) dans Exercise 2), montrez que, dans le cas sans masse, celui-ci peut s'écrire

$$D_F(x) = -\frac{1}{4\pi^2\,x^2} \qquad\qquad (\text{pour } x^2 \neq 0)\,.$$

Indications : On évaluera l'intégrale sur $\vec{k}$ en coordonnées polaires en tenant compte de la prescription $i\epsilon$ (préciser son rôle dans la demonstration).