HLPH516 : Prolégomènes

Rappels des outils mathématiques utilisés en Physique

Durée : 20 H Cours/TD

sandrine.juillaguet@umontpellier.fr

L2C Bat 21 2ème étage

Plan

- Calcul d'erreurs incertitudes
- Systèmes de coordonnées
- Calcul matriciel
- Systèmes linéaires
- Opérateurs
- Equations différentielles
- Développements limités
- Intégrales-dérivées……

Sources à utiliser

http://www.canal-u.tv/producteurs/les_amphis_de_france_5/mathematiques

dans DEUG 1 DEUG2 et Licence

Systèmes linéaires et matrices

Déterminants diagonalisation de matrices

Nbres complexes

Equations différentielles…

http://tutorial.math.lamar.edu/

Mesures et incertitudes

Soit R une grandeur
La valeur R est comprise entre deux limites :

$$\mathbf{r - \Delta r < R < r + \Delta r}$$

-Δr est appelée limite supérieure de **l'incertitude absolue** sur la résistance R ;

-Δr/r est appelée **l'incertitude relative** sur la résistance.

Exemple si R=200 Ω à 5% Δr =10 Ω donc R a une valeur comprise entre 190 et 210 Ω.

Mesures et incertitudes

Soit S une grandeur mesurée indirectement à partir de grandeurs A, B, C mesurée directement.
S = S (A, B, C)
On peut calculer S connaissant la valeurs des grandeurs A, B, C mais les valeurs a, b, c des grandeurs A, B, C étant connues avec des incertitudes Δa, Δb, Δc on obtiendra pour la grandeur S une valeur s avec une incertitude Δs.

Objectif : calculer d'incertitude Δs connaissant Δa, Δb, Δc.

Δa, Δb, Δc étant petits par rapport à a, b, c on peut utiliser la formulation variationnelle pour calculer Δs en assimilant s à une fonction des variables a, b, c et en assimilant leurs variations ds, da, db, dc aux incertitudes Δs, Δa, Δb, Δc.

Mesures et incertitudes

<u>En termes de variation :</u> $s = s\,(a, b, c)$ et :

$$ds = \frac{\partial s}{\partial a}\,da + \frac{\partial s}{\partial b}\,db + \frac{\partial s}{\partial c}\,dc$$

(ds, da, db, dc peuvent être positives ou négatives)

.

Mesures et incertitudes

<u>En termes d'incertitudes</u>

L'incertitude sur la valeur déterminée dans l'expérience est toujours majorée, donc on se place dans la situation la plus défavorable, dans laquelle toutes les erreurs s'ajoutent, d'où l'erreur absolue et donc où Δa, Δb, Δc <u>sont positives</u>

$$\Delta s = \left|\frac{\partial s}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial s}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial s}{\partial c}\right| \Delta c$$

<u>**Remarque:**</u> *les calculs des dérivées partielles peuvent être remplacés par le calcul de la dérivée logarithmique de la fonction :* d (Ln (s)) = ds/s *; d'où l'erreur relative :* $\Delta s/s$. *Cette méthode est <u>particulièrement avantageuse</u> lorsqu'on a un produit ou un quotient de plusieurs variables.*

PRÉCISION ET CHIFFRES SIGNIFICATIFS

Toute valeur mesurée n'a de signification que si elle s'accompagne de son domaine d'incertitude.
Lorsqu'un physicien présente un résultat numérique correspondant à la mesure d'une grandeur, l'expression qu'il donne contient explicitement la précision correspondant à cette mesure.

Pour présenter un résultat expérimental de façon à ce qu'il soit significatif de la mesure effectuée, le nombre de chiffres donnés (chiffres significatifs) doit être tel que seul le dernier ou les deux derniers chiffres soient affectés par l'incertitude.
En règle générale, <u>*l'incertitude absolue ou relative ne doit pas comporter plus de deux chiffres*</u> et n'affecte que les deux derniers chiffres exprimés pour la mesure de la grandeur.

PRÉCISION ET CHIFFRES SIGNIFICATIFS

Exemple

Pour déterminer la masse volumique ρ d'un cylindre :

$\rho = M/V = M/\pi R^2 H$

on a mesuré M, R et H , et compte tenu des incertitudes de mesures effectuées, on a trouvé :

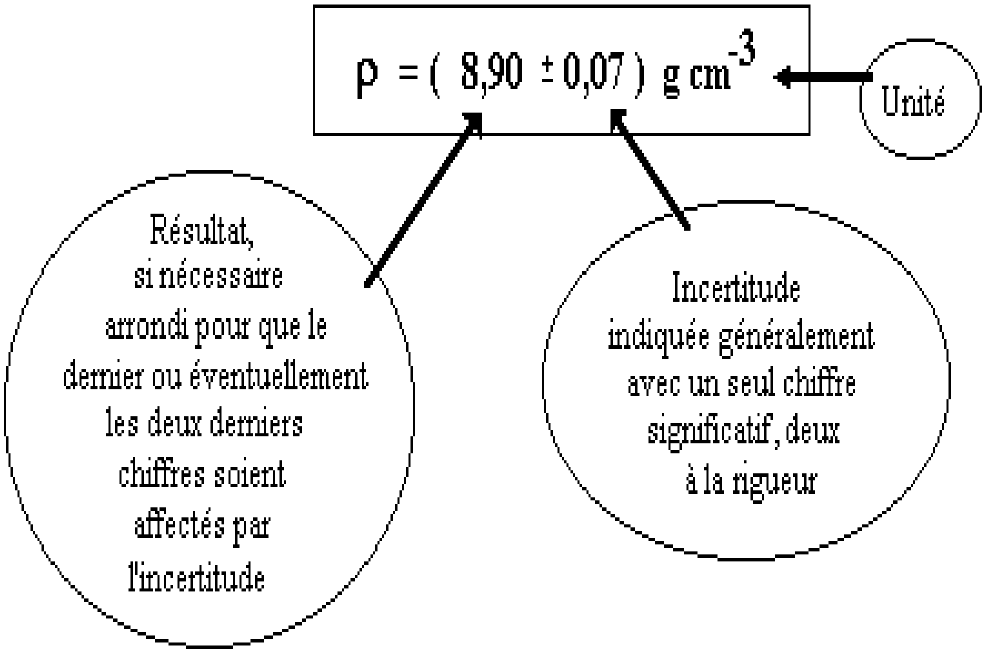
$M = 60{,}96 \pm 0{,}01$ g;	donc	ΔM	$= 0{,}01$ g
$R = 1{,}015 \pm 0{,}003$ cm;	donc	ΔR	$= 0{,}003$ cm
$H = 2{,}116 \pm 0{,}002$ cm;	donc	ΔH	$= 0{,}002$ cm
et on prend : $\pi = 3{,}141$		$\Delta \pi$	$= 0{,}001$ cm

Calcul de l'incertitude relative : $\frac{\Delta\rho}{\rho} \le \frac{0{,}01}{60{,}96} + \frac{0{,}001}{3{,}141} + \frac{0{,}003}{1{,}015} + \frac{0{,}002}{2{,}116}$ donc: $\frac{\Delta\rho}{\rho} \le 0{,}007$

Calcul de l'incertitude absolue : $\Delta\rho < 0{,}0653$

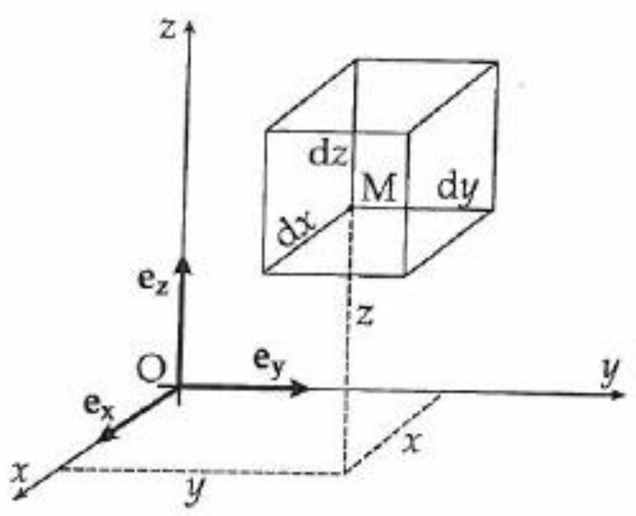
Précision et chiffres significatifs

Calcul de l'incertitude absolue : $\Delta\rho < 0{,}0653$



Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes



Axes perpendiculaires de vecteurs unitaires :

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

La norme de chaque vecteur est égale à 1.

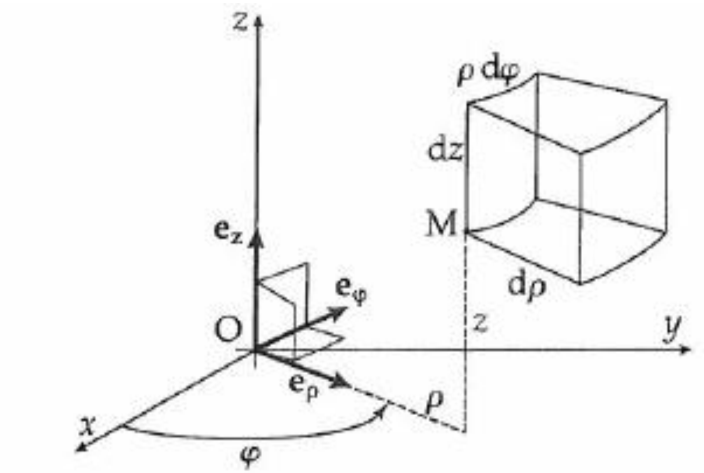
Produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul

$e_x \wedge e_y = e_z$
$e_y \wedge e_z = e_x$
$e_z \wedge e_x = e_y$

q	dq	dl	ds	e	dV
x	dx	dx	dy dz	e_x	dx dy dz
y	dy	dy	dz dx	e_y	
z	dz	dz	dxdy	e_z	

Systèmes de coordonnées

Coordonnées cylindriques



Axes perpendiculaires de vecteurs unitaires :

$$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$$

La norme de chaque vecteur est égale à 1.

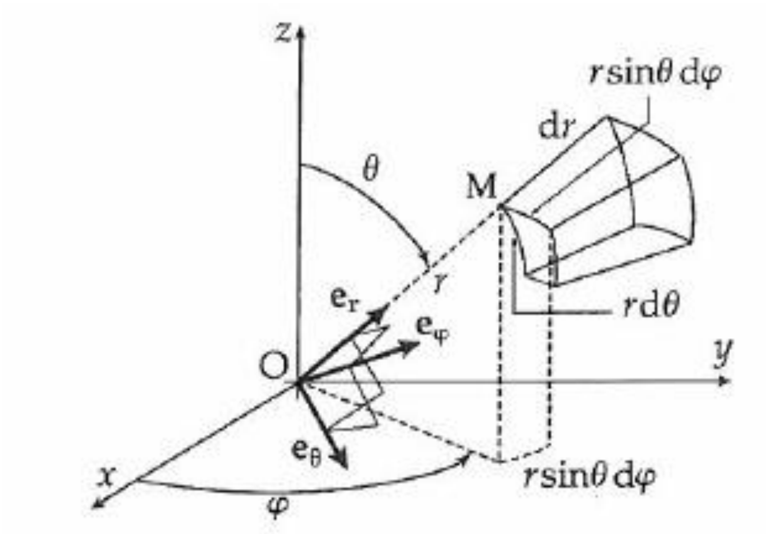
Produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul
Produit vectoriel du même vecteur est nul

$$e_\rho \wedge e_\varphi = e_z$$
$$e_\varphi \wedge e_z = e_\rho$$
$$e_z \wedge e_\rho = e_\varphi$$

q	dq	dl	ds	E	dV
ρ	$d\rho$	$d\rho$	$\rho d\varphi\ dz$	e_x	$\rho d\rho\ d\varphi\ dz$
φ	$d\varphi$	$\rho d\varphi$	$dz\ d\rho$	e_y	
z	dz	dz	$\rho d\rho\ d\varphi$	e_z	

Systèmes de coordonnées

Coordonnées sphériques



Axes perpendiculaires de vecteurs unitaires :

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\,, \vec{e}_\varphi$

La norme de chaque vecteur est égale à 1.

Produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul
Produit vectoriel du même vecteur est nul

q	dq	dl	ds	E	dV
r	dr	dr	$r^2 \sin\theta d\theta\, d\varphi$	e_x	$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$
θ	$d\theta$	$rd\theta$	$r \sin\theta\, d\varphi\, dr$	e_y	
φ	$d\varphi$	r $\sin\theta d\varphi$	$rd\theta\, dr$	e_z	

$e_r \wedge e_\theta = e_\varphi$
$e_\theta \wedge e_\varphi = e_r$
$e_\varphi \wedge e_r = e_\theta$

Systèmes de coordonnées

Changement de coordonnées

- **Cartésiennes $\longleftrightarrow$ cylindriques**

$$x = \rho \cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho \sin\varphi \qquad \varphi = \arctan(y/x)$$
$$z = z \qquad z = z$$

- **Cartésiennes $\longleftrightarrow$ sphériques**

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad \theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$$
$$z = r \cos\theta \qquad \varphi = \arctan(y/x)$$

- **Cylindriques $\longleftrightarrow$ sphériques**

$$\rho = r \sin\theta \qquad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$\varphi = \varphi \qquad \theta = \arctan(\rho/z)$$
$$z = r \cos\theta \qquad \varphi = \varphi$$

Calcul matriciel

Définition

Une matrice de format (m, n) est un tableau rectangulaire de mn éléments rangés en lignes et en colonnes.

Le premier indice est le nbre de lignes ici m, le second ici n le nbre de colonnes.
l'élément a_{ij} est l'élément qui se trouve à la ligne i et à la colonne j.

Matrice carrée : m=n, m=n=1 : un nbre.
Matrice ligne à n colonnes : m=1; Matrice colonne à m lignes : n=1

Lettre capitale désigne une matrice, encadrée par des crochets ou des parenthèses
Déterminant : crochets simples

Exemples : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, et $L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$. A est une matrice carrée d'ordre 3. B est de format $(3, 2)$, C de format $(2, 3)$. D est une matrice-colonne d'ordre 3, et L une matrice-ligne d'ordre 3.

Calcul matriciel

Définitions

Identité : Deux matrices de même format sont égales si tous les éléments sont identiques.

Diagonale : La diagonale d'une matrice est l'ensemble des éléments aii.

Transposée : La transposée de la matrice A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemples : Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors : $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, alors : $C^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Calcul matriciel

Opérations

La somme de deux matrices de même format est telle que pour chaque élément de matrice $[a_{i,j}] + [b_{i,j}] = [a_{i,j} + b_{i,j}]$.

$$\textbf{Exemple :} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Propriétés Pour A, B, C de même format, et des scalaires λ, μ :

$A + (B + C) = (A + B) + C$. *(la somme est associative)*

$A + B = B + A$. *(la somme est commutative)*

$A + 0 = 0 + A = A$. *(la matrice 0 est element neutre)*

Toute matrice admet une opposee, $-A = (-1)A$.

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$. *(le produit par un scalaire est distributif par rapport a la somme des matrices et par rapport a la somme des scalaires)*

$(A + B)^t = A^t + B^t$. *(la transposee d une somme est la somme des transposees)*

Calcul matriciel

Opérations

Multiplication par un nombre

Par un nbre λ : le produit de la matrice A par un nbre λ est la matrice λ A. La matrice λ A a le même format que A. Si λ =1, on obtient A, si λ =0, on obtient la matrice nulle ou tous les éléments de matrice sont nuls.

Exemples : $3\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, et $(-1)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Calcul matriciel

Opérations

Produit de matrice

Cas général, le produit de 2 matrices est défini que si le nbre de colonnes de la première est égal au nbre de lignes de la seconde.

A (m,n)

B (n,p)

C=AB est de format (m,p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32 \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b.$$

Calcul matriciel

Opérations

Produit de matrice

Cas général, le produit de 2 matrices est défini que si le nbre de colonnes de la première est égal au nbre de lignes de la seconde.

A (m,n)

B (n,p)

C=AB est de format (m,p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32 \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Calcul matriciel

Opérations

Produit de matrice

Cas général, le produit de 2 matrices est défini que si le nbre de colonnes de la première est égal au nbre de lignes de la seconde.

Proprietes Pour A, B, C (telles que les produits existent), et des scalaires λ, μ :

$A(BC) = (AB)C$. *(le produit est associatif)*

$AB \neq BA$ en general. *(le produit n est pas commutatif)*

$A0 = 0$ et $0A = 0$. *(chaque matrice nulle est element absorbant)*

$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$. *(associativite generalisee)*

$(AB)^t = B^t A^t$. *(attention a l ordre)*

$A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$. *(le produit est distributif a gauche et a droite par rapport a la somme)*

Le produit AB peut être nul avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. *(le produit des matrices n est pas integre, voir exemple ci-dessus)*

En particulier, dans le calcul matriciel, on ne peut pas simplifier :

$AC = BC$ n'implique pas necessairement $A = B$ *(l hypothese equivaut a $(A - B)C = 0$)*

Calcul matriciel

Opérations

Matrice carrée : m=n

Matrice identité $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrice inversible

On dit qu'une matrice est inversible si et seulement si une matrice de même format existe et telle que : AB=BA=1, on dit que B est l'inverse de A et est noté A^{-1} .

Exemples : Puisque $I^2 = I$, la matrice identité est sa propre inverse : $I^{-1} = I$.

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et si $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors : $AB = BA = I$, et donc $B = A^{-1}$.

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, et si $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors : $AB = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Puisque AB n'est jamais égale à I(pour toute matrice B), la matrice A n'est pas inversible.

Calcul matriciel

Opérations

Matrice inversible

- **Proprietes** Si $AB = I$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.
  (cette importante propriete montre qu il est inutile, en pratique, de calculer AB et BA)
  On en deduit que si A est inversible, alors son inverse est **unique**.
  $(A^{-1})^{-1} = A$, autrement dit, A^{-1} est inversible, d'inverse A.
  Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ *(attention a l ordre)*.
  Si A est inversible et si $\lambda \neq 0$, alors λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.
  Si A est inversible, alors A^t l'est aussi, et : $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
  (l inverse de la transposee est la transposee de l inverse)

Theorème 1 *Soit A une matrice carree d ordre n, et soient X et B deux matrices-colonnes d ordre n. Si A est inversible, alors le systeme $AX = B$ admet une solution unique, donnee par : $X = A^{-1}B$, quelle que soit la matrice-colonne B.*
Reciproquement, si le systeme $AX = B$ n admet qu une seule solution, pour une matrice-colonne quelconque B, alors A est inversible (et la solution est $X = A^{-1}B$).

Calcul matriciel

Opérations

Matrice inversible

.

Exercice 1 *Determiner l'inverse de la matrice :* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Posons $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, et $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Le système $AX = B$ s'écrit :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \quad\;\; y + z = b \\ \quad\quad\;\;\; z = c \end{cases}$$

La troisième équation donne : $z = c$.

En reportant dans la deuxième, on obtient : $y = b - c$.

Puis dans la première : $x = a - (b - c) - c = a - b$. D'où : $\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

Calcul matriciel

Opérations

Matrice diagonale: si tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls

Matrice triangulaire supérieure: si tous les éléments au dessous de la diagonale sont nuls

Matrice triangulaire inférieure: si tous les éléments au dessus de la diagonale sont nuls

Exemples : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est triangulaire superieure, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est triangulaire inferieure et $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ est diagonale.

Calcul matriciel

Déterminant

À toute matrice carrée A correspond une valeur appelée le déterminant de A, que l'on dénote par

$$det(A) \text{ ou encore } |A|$$

Nous éviterons la définition formelle du déterminant (qui implique des notions de permutations) mais allons plutôt nous concentrer sur le calcul celui-ci.

Calcul sur une matrice 2X2

Considérons la matrice A de dimension 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est définie par la relation

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$a. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ $b. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$c. \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $d. \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcul matriciel

<u>Calcul pour une matrice >2</u>

Définition d'une mineure

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1ère rangée et la 2^e colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 3.8 = 15 - 24 = -9$$

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 2^e rangée et la 2^e colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 4.8 = 6 - 32 = -26$$

Calcul matriciel

Définition du cofacteur

Le cofacteur, C_{ij}, d'une matrice A est défini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Vous constaterez que le cofacteur et le mineur ont toujours la même valeur numérique, à l'exception parfois de leur signe.

Calcul matriciel

Application au calcul du déterminant

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

- Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)…
- Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij}, correspondant…
- Faire la somme de ces résultats.

Quel est le déterminant de la matrice A?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul matriciel

Application au calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Suivons le processus proposé plus haut (expansion par cofacteurs) :

- Choisir une rangée ou une colonne de A... Pour l'instant, choisissons la première rangée.
- Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants... Les éléments de la première rangée sont $a11 = 2, a12 = 1$, et $a13 = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire C_{11}, C_{12} et C_{13} qui sont

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0.(-2) - 2.0) = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(1 \times (0) - 2 \times 0) = 0$$

Finalement, il s'agit de faire le calcul

$$det\ A = 2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 0 = 6$$

$$det\ A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

On peut vérifier qu'en utilisant une autre expansion on obtient le même résultat

Calcul matriciel

Calcul du déterminant par une autre méthode

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette seconde méthode est en tout point équivalente à l'expansion par cofacteurs mais vous permettra d'éviter l'utilisation des cofacteurs.

- Octroyer à chacun des éléments un signe $+/-$ en suivant la règle suivante : on associe un signe positif à la position a_{11} , puis on alterne les signes en se déplaçant horizontalement ou verticalement.
- Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)...
- Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son mineur correspondant, i.e. le déterminant qu'il reste lorsqu'on élimine la rangée et la colonne dans lesquelles se trouve a_{ij}.
- Faire la somme ou la différence de ces résultats selon le signe accordé aux éléments lors de la première étape.

Calcul matriciel

Calcul du dét

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit donc la matrice A à laquelle on octroie un signe $+/-$ selon la règle décrite plus tôt.

$$A = \begin{pmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 2^+ & 0^- & -2^+ \end{pmatrix}$$

- Choisissons la 3^e colonne (ce n'est certes pas le meilleur choix puisque la 2^e rangée possède plus d'éléments nuls mais...)
- Nous multiplions ensuite chaque élément par son mineur correspondant :

$$3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times 0 = 0$$

$$2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) = -4$$

$$-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-1) = 2$$

- Finalement, les signes respectifs des éléments de la 3^e colonne nous indiquent les opérations qui doivent être effectuées entres ces valeurs pour obtenir le déterminant :

$$\det A = +0 - (-4) + 2 = 6$$

Systèmes linéaires

On appelle système d'équations linéaires à coefficients réels un système de type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

aij et bij sont des réels
xi sont les inconnues

Résoudre = déterminer les xi s'ils existent
Il existe différentes méthodes, on détaillera 3
Graphiques
Pivot de gauss (sustitution)
Systèmes de Cramer (matrice)

Systèmes linéaires

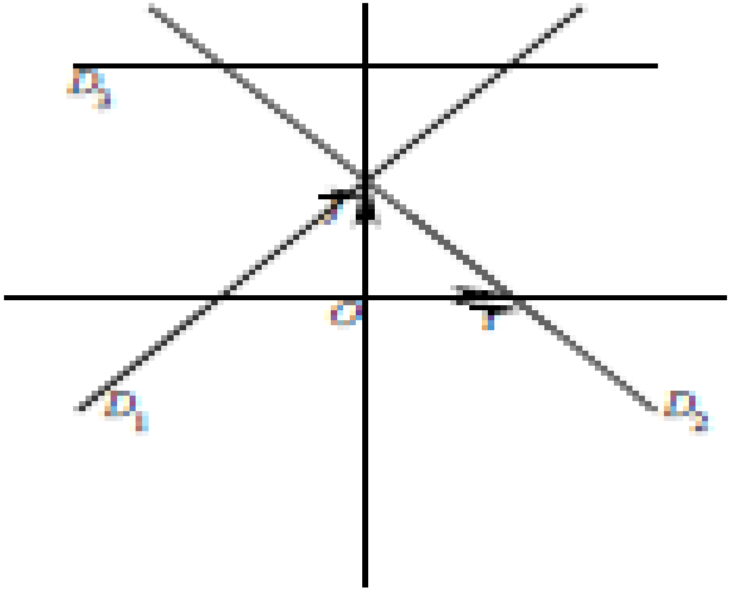
Résolution graphiques : exemple sur un système à deux inconnues

Une équation linéaire à deux inconnues, du type $a_1x + a_2y = b$, est l'équation d'une droite dans le plan. Plus précisément, si a_1, a_2 et b sont des réels fixés, tels que $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$, l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $a_1x + a_2y = b$ est une droite affine. Chercher les couples (x, y) qui vérifient plusieurs équations du même type, c'est chercher les points communs à plusieurs droites affines. Voici trois exemples de systèmes de 3 équations à 2 inconnues.

Systèmes linéaires

Résolution graphiques : exemple sur un système à deux inconnues

$$\begin{cases} x & -y & = & -1 \\ x & +y & = & 1 \\ & y & = & 2 \end{cases}$$

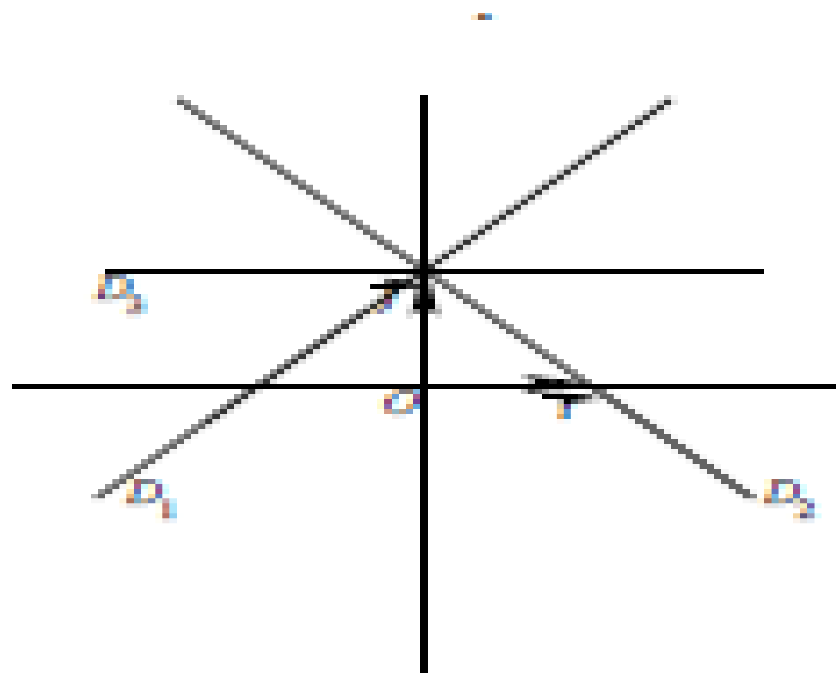


Aucun points communs aux 3 droites D1 (équa 1), D2 (équa 1), D3(équa 1), donc pas de solution au système

Systèmes linéaires

Résolution graphiques : exemple sur un système à deux inconnues

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & -y & = & -1 \\ x & +y & = & 1 \\ & y & = & 1 \end{array}\right.$$

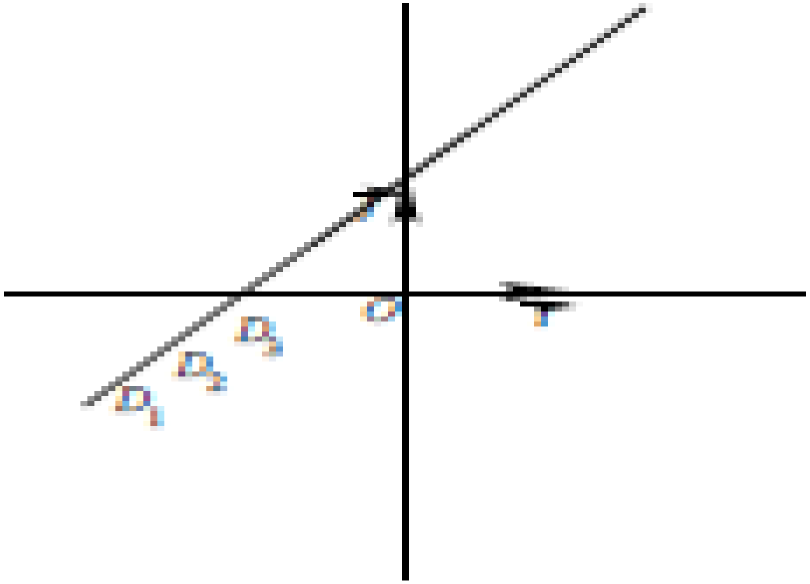


Solution unique y=1, x=0

Systèmes linéaires

Résolution graphiques : exemple sur un système à deux inconnues

$$\begin{cases} x & -y & = & -1 \\ 2x & -2y & = & -2 \\ -x & +y & = & 1 \end{cases}$$



Infinité de solution puisque les 3 équations sont équivalentes

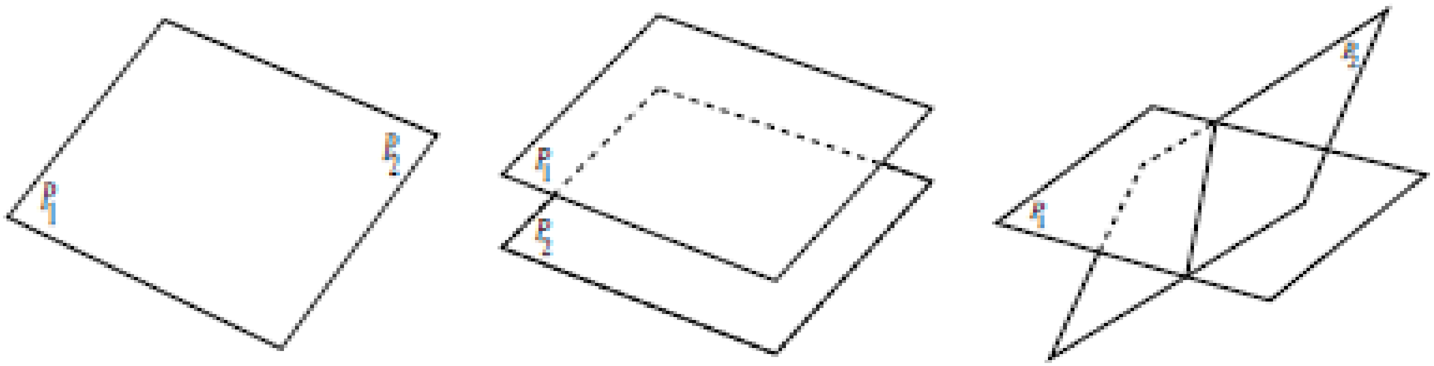
Systèmes linéaires

Résolution graphiques : exemple sur un système à 3 inconnues

Une équation linéaire à trois inconnues x, y, z est l'équation d'un plan dans l'espace.

Voici trois systèmes de deux équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y - z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y - z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$



Moins intuitif pour n>3

Systèmes linéaires

Résolution par pivot de Gauss (addition substitution)

Considérons le système suivant $\begin{cases} x+y+z=2 \\ -7y-z=5 \\ 2z=4 \end{cases}$ dit « échelonné ».

On remarque que la dernière équation permet d'obtenir aisément $z=2$. En reportant cette valeur dans la deuxième équation, on a $y=-1$ et enfin en reportant les valeurs de y et de z dans la première équation on a $x=1$.

Autrement dit, si on parvient à mettre le système à résoudre sous forme échelonné, on pourra, en remontant de la solution de la dernière équation à résoudre successivement toutes les équations. C'est le principe de la **méthode du pivot de Gauss.**

Systèmes linéaires

Résolution par pivot de Gauss (addition substitution)

Propriétés

L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si on effectue sur les équations les « opérations élémentaires » suivantes :

- Changer l'ordre des équations
- Multiplier une équation par une constante non nulle
- Ajouter à une équation une « combinaison linéaire » des autres équations
- Changer l'ordre des variables.

Systèmes linéaires

Résolution par l'exemple et la méthode pivot de Gauss

$$\textit{Exemple 1}: \begin{cases} x+2y-z=1 & L_1 \\ 2x+y-z=5 & L_2 \\ x-z=5 & L_3 \end{cases}.$$

On effectue les opérations élémentaires $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - L_1$. Le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3y+z=3 \\ -2y=4 \end{cases}$$. On échange l'ordre des variables y et z afin d'obtenir le système échelonné

Systèmes linéaires

Résolution par l'exemple et la méthode pivot de Gauss

$$\begin{cases} x - z + 2y = 1 \\ z - 3y = 3 \\ -2y = 4 \end{cases} .$$

La résolution en « partant du bas » conduit à $y = -2$ puis $z = 3 + 3\times(-2) = -3$ et enfin $x = 1 + (-3) - 2\times(-2) = 1.$

Le système admet la solution unique $x = 1, y = -2, z = -3.$

Systèmes linéaires

Résolution par l'exemple et la méthode pivot de Gauss

Cette méthode conduit à 3 résultats différents

- **La solution unique (exemple précédent)**
- **Pas de solution**
- **Une infinité de solution**

Systèmes linéaires

Résolution par l'exemple et la méthode pivot de Gauss

- **Montrer que ce système n' a pas de solution**

1^er cas : il se présente une équation du type $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$.

Dans ce cas, le système ne possède pas de solution.

$$\textit{Exemple 2} : \begin{cases} 2x - y - 2z + 3w = 1 & L_1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 & L_2 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 & L_3 \end{cases}.$$

Systèmes linéaires

$$\begin{cases} 2x - y - 2z + 3w = 1 & L_1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 & L_2 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 & L_3 \end{cases}.$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes pour faire disparaître les x des lignes 2 et 3

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \to 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to 2L_3 - 3L_1 \end{array} \qquad \begin{cases} 2x - y - 2z + 3w = 1 \\ \quad y + 4z - 5w = 5 \\ \quad 3y + 12z - 15w = 7 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes pour faire disparaître les y de la ligne 3 :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \to L_3 - 3L_2 \end{array} \qquad \begin{cases} 2x - y - 2z + 3w = 1 \\ \quad y + 4z - 5w = 5 \\ \quad 0 = -8 \end{cases}$$

La dernière équation permet d'affirmer que le système n'a pas de solution.

Systèmes linéaires

Résolution par l'exemple et la méthode pivot de Gauss

- **Montrer que ce système a une infinité de solutions**

$$\begin{cases} x+2y-2z = 2 & L_1 \\ 2x+4y-3z = 5 & L_2 \\ 5x+10y-8z = 12 & L_3 \end{cases}$$

Systèmes linéaires

Exemple 3 : $\begin{cases} x+2y-2z = 2 & L_1 \\ 2x+4y-3z = 5 & L_2 \\ 5x+10y-8z = 12 & L_3 \end{cases}$ système équivalent à

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1 \end{array} \quad \begin{cases} x+2y-2z = 2 \\ z = 1 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 - 2L_2 \end{array} \quad \begin{cases} x+2y-2z = 2 \\ z = 1 \\ 0z = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x+2y-2z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

En reportant $z=1$ dans la première équation, il vient $x+2y=4$ ou encore $x=4-2y$, $y \in IR$

Dans ce cas, le système admet une infinité de solutions données par $x=4-2y$, $y \in IR$, $z=1$.

Systèmes linéaires

Résolution par la méthode de Cramer

Commençons par le cas $n = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = & b_2 \end{array} \right.$$

Ce système a une solution unique si et seulement si son *déterminant* est non nul.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \neq 0 \ .$$

Si c'est le cas, les coordonnées de la solution s'écrivent comme des rapports de déterminants.

$$x_1 = \frac{b_1a_{2,2} - b_2a_{1,2}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \ .$$

Systèmes linéaires

Résolution par la méthode de Cramer idem pour n=3

Une formule analogue permet de calculer la solution d'un système 3×3.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

Ce système a une solution unique si et seulement si son *déterminant* est non nul.

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} \right| \neq 0 \,.$$

Si c'est le cas les coordonnées de la solution s'écrivent encore comme des rapports de déterminants.

$$x_1 = \frac{\left| \begin{array}{ccc} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} \right|}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{array} \right|}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{array} \right|}{\Delta} \,.$$

Opérateurs

Soit **A** un vecteur et f une fonction scalaire, les opérateurs gradient, divergence, rotationnel, laplacien et laplacien vectoriel leur font correspondre des grandeurs vectorielles ou scalaires :

$$\mathbf{grad}\, f, \qquad \mathrm{div}\, \mathbf{A}, \qquad \mathbf{rot}\, \mathbf{A}, \qquad \Delta f, \qquad \Delta \mathbf{A}.$$

Opérateurs

En coordonnées cartésiennes

$$\text{grad}\, f \left| \begin{array}{l} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{array} \right.$$

$$\text{div}\, \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot}\, \mathbf{A} \left| \begin{array}{l} \partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z \\ \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x \\ \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y \end{array} \right.$$

$$\Delta \mathbf{A} \left| \begin{array}{l} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{array} \right.$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On peut aussi les écrire en coordonnées sphériques et cylindriques (cf fin de diapo)

Opérateurs

Relation et Théorèmes

$$df = \mathbf{grad}\, f \,.\, \mathbf{dl}\,,$$

$$\text{div}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{A} = 0\,,$$

$$\mathbf{grad}\,(fg) = g\, \mathbf{grad}\, f + f\, \mathbf{grad}\, g\,,$$

$$\mathbf{rot}\,(f\mathbf{A}) = \mathbf{grad}\, f \wedge \mathbf{A} + f\, \mathbf{rot}\, \mathbf{A}\,,$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, f = 0\,,$$

$$\text{div}\, \mathbf{grad}\, f = \Delta f\,,$$

$$\text{div}\,(f\mathbf{A}) = \mathbf{grad}\, f \,.\, \mathbf{A} + f\, \text{div}\, \mathbf{A}\,,$$

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\, \mathbf{A}) = \mathbf{grad}\, \text{div}\, \mathbf{A} - \Delta\, \mathbf{A}.$$

Théorème de la divergence (d'Ostrogradsky)

À condition que les composantes du vecteur et leurs dérivées soient continues dans les deux domaines d'intégration, le volume τ et la surface S qui le limite :

$$\int_S \mathbf{A} \,.\, \mathbf{ds} = \int_\tau \text{div}\, \mathbf{A} \,.\, d\tau$$

Equations différentielles

Il existe plusieurs types d'équations différentielles

Les équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants sans second membre : $y' + 5y = 0$

Les équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants avec second membre : $y' + 5y = e^x$

Les équations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants sans second membre : $2y'' - 3y' + 5y = 0$

Les équations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants avec second membre : $2y'' - 3y' + 5y = sinx$

Equations différentielles

Il existe plusieurs types d'équations différentielles

Les équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients variable : $y'' + sinx\, y'5y - exy = 0$

Les équations différentielles non linéaires : $\mathbf{y}''^{y'} - y = 0$

Equations différentielles

Du premier ordre à coeficients constants sans second membre

II) Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

y(x) est une fonction de la variable x, y'=dy/dx

$y' + ay = 0$ $\quad\quad$ $\frac{dy}{dx} + ay = 0,$

$y' = -ay$ $\quad\quad$ $\frac{dy}{dx} = -ay$

$\frac{y'}{y} = -a$ $\quad\quad$ $\frac{dy}{y} = -adx$

Equations différentielles

Du premier ordre à coeficients constants sans second membre

II) Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

$$\frac{y'}{y} = -a$$

$$\frac{dy}{y} = -adx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -adx$$

Ln(y)=-ax+cte

Exp(Ln(y))= exp(-ax+cte)=

$$\boxed{y(x) = A\ exp^{-ax}}$$

Equations différentielles

Du premier ordre à coeficients constants sans second membre

Application

Application:

2y’-3y=0

$$\frac{dx}{dt} - Bx = 0$$

Equations différentielles

Du premier ordre à coeficients constants avec second membre

Soit l'équation suivante (1)

$$y' + Ay = f(x) \quad ou \quad \frac{dy}{dx} + Ay = f(x)$$

Méthode:

Résolution de l'équation sans second membre solution: on obtient la solution S1

La solution S2 est de la solution particulière déterminer comme solution de l'équation totale

La solution totale est s= S1+S2

La solution totale vérifie l'équation (1), cela permet en général le calcul de certaines ctes. Le calcul des constantes se détermine aussi à partir des conditions aux limites

Equations différentielles

Théorème : la solution générale $y(x)$ de l'équation $ay'(x) + by(x) = f(x)$ est la somme $\boldsymbol{y(x) = y_s(x) + y_p(x)}$ où :

- $\boldsymbol{y_s(x)}$ est la solution générale de l'équation $ay'(x) + by(x) = 0$ (dite sans second membre)
- et $\boldsymbol{y_p(x)}$ est une solution particulière de l'équation $ay'(x) + by(x) = f(x)$ (dite avec second membre)

Comment détermine t-on cette solution particulière ?

Propriété (admise) : quand le second membre $f(x)$ d'une EDL1CC se présente sous l'une des formes usuelles recensées plus bas, alors cette équation différentielle admet une solution particulière $y_p(x)$ de la même "forme" que le second membre $f(x)$. Plus précisément :

Equations différentielles

Le second membre est constant

second membre	solution particulière
$f(x) = C$ où C est une constante	si $b \neq 0$, une solution particulière sera $y_p(x) = \frac{C}{b}$
	et si $b = 0$, une solution particulière sera $y_p(x) = \frac{C}{a}x$

Equations différentielles

Le second membre est polynomial

second membre	solution particulière
$f(x) = P(x)$ où P est un polynôme de degré n avec $n \in \mathbb{N}^*$	On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = Q(x)$ où Q est un polynôme tel que :
	si $b \neq 0$, alors $\deg(Q) = n$
	si $b = 0$, alors $\deg(Q) = n + 1$ et $\mathrm{val}(Q) = 1$

Equations différentielles

Le second membre est de forme exponentiel

second membre	solution particulière	
$f(x) = P(x)\, e^{sx}$ où P est un polynôme de degré n et s est un réel	On cherche une solution sous la forme $$y_p(x) = Q(x)\, e^{sx}$$ où Q est un polynôme tel que :	
	si $s \neq -\frac{b}{a}$, alors $\deg(Q) = n$	
	si $s = -\frac{b}{a}$, alors $\deg(Q) = n+1$ et $\mathrm{val}(Q) = 1$	
justification		

Equations différentielles

Le second membre est de forme sinusoidale

second membre	solution particulière
$f(x) = \alpha\cos(\omega x + \varphi) + \beta\sin(\omega x + \varphi)$ où ω est une réel non-nul	On cherche une solution sous la forme : $y_{\boldsymbol{p}}(x) = A\cos(\omega x + \varphi) + B\sin(\omega x + \varphi)$

Si le second membre ne correspond pas aux formes précitées???

Equations différentielles

Le second membre est quelconque: methode de la variation de la constante

Lorsque le second membre $f(x)$ d'une EDL1CC ne correspond à aucun des seconds membres usuels identifiés précédemment et donc ne permet pas de connaître la forme d'une solution particulière, on utilise la méthode dite de variation de la constante.

- Pour cela, on résout tout d'abord l'équation sans second membre associée comme on l'a vu précédemment : on obtient la solution générale $y_s(x) = k\, e^{\frac{-b}{a}x}$ où k est une constante réelle.

- Puis, on fait comme si k était une fonction de x, en cherchant à quelle condition la fonction $y(x) = k(x)\, e^{\frac{-b}{a}x}$ est solution de l'équation (ε). On dérive donc $y(x)$:

$$y'(x) = k'(x)\, e^{\frac{-b}{a}x} - \frac{b}{a}k(x)\, e^{\frac{-b}{a}x}$$

Equations différentielles

Le second membre est quelconque: méthode de la variation de la constante

On remplace alors les expressions de $y(x)$ et $y'(x)$ dans (ε) :

$$a\left(k'(x)\,e^{\frac{-b}{a}x}-\frac{b}{a}k(x)\,e^{\frac{-b}{a}x}\right)+b\,k(x)\,e^{\frac{-b}{a}x}=f(x)$$

Après simplification, on obtient :

$$a\,k'(x)\,e^{\frac{-b}{a}x}=f(x)\Longleftrightarrow k'(x)=\frac{f(x)}{a}\,e^{\frac{b}{a}x}$$

En intégrant cette dernière relation, on trouve l'expression de $k(x)$ qu'on peut remplacer dans celle de $y(x)$ pour en déduire la solution générale de l'équation avec second membre (ε) .

Equations différentielles

Second membre

Principe de superposition

<u>Remarque</u> : en cas de second membre composé, on applique le principe de "superposition" :

$$(E) : y'' - 5y' + 4y = x^2 + \cos x$$

Déjà, on résout (E_1) : $y'' - 5y' + 4y = x^2$.

On trouve : $$y_1(x) = A_1\,\mathbf{e}^x + B_1\,\mathbf{e}^{4x} + \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{21}{32}$$

Ensuite, on résout (E_2) : $y'' - 5y' + 4y = x^2 + \cos x$

On trouve : $$y_2(x) = A_2\,\mathbf{e}^x + B_2\,\mathbf{e}^{4x} + \frac{3}{34}\cos x - \frac{5}{34}\sin x$$

On ajoute y_1 et y_2 pour obtenir les solutions de (E) :

$$y(x) = A\,\mathbf{e}^x + B\,\mathbf{e}^{4x} + \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{21}{32} + \frac{3}{34}\cos x - \frac{5}{34}\sin x$$

Equations différentielles

<u>Du premier ordre à coeficients constants avec second membre</u>
EXEMPLE

<u>Méthode:</u>
Résolution de l’équation sans second membre solution: S1
La solution S2 est une constante (car le 2^{nd} membre est cte)
La solution totale est s= S1+S2
La solution totale vérifie l’équation (1), cela permet en général le calcul de certaines ctes.
Le calcul des constantes se détermine d’une part à partir des conditions aux limites

Equations différentielles

Du second ordre à coeficients constants sans second membre

$$a\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+b\cdot\frac{dx}{dt}+c\cdot x=0.$$

Poser l'équation caractéristique : $a\cdot r^2+b\cdot r+c=0$. Calculer son discriminant Δ. (rappel $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$) On distingue alors 3 cas.

- $\Delta>0$, le polynome admet deux racines réelles r_1 et r_2. Alors $x(t)=A\cdot e^{r_2\cdot t}+B\cdot e^{r_1\cdot t}$. Il reste à déterminer A et B en fonction des conditions initiales (par exemple $x(0)=\ldots$ et $\left(\frac{d\,x(t)}{dt}\right)_{t=0}=\ldots$
- $\Delta=0$, le polynome admet une seule racine réelle, r (dite racine double). Alors $x(t)=(A\cdot t+B)\cdot e^{r_1\cdot t}$. Il reste à déterminer A et B en fonction des conditions initiales
- $\Delta<0$ le polynome admet deux racines complexes conjuguées $r_1=\alpha+i\cdot\beta$ et $r_2=\alpha-i\cdot\beta$. La solution est alors de la forme $x(t)=e^{\alpha\cdot t}\cdot(A\cdot\cos(\beta\cdot t)+B\cdot\sin(\beta\cdot t))$. Il reste à déterminer A et B, en fonction des conditions initiales.

  Note : La solution peut être mise sous la forme $x(t)=K\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\cos(\beta\cdot t+\varphi)$. Dans ce cas, les conditions initiales permettent de déterminer K et φ.

Equations différentielles

Du second ordre à coeficients constants sans second membre

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'' - 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$ d'où $\lambda = 1 + 2\mathrm{i}$ et $\overline{\lambda} = 1 - 2\mathrm{i}$ d'où $f(x) = \mathrm{e}^x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x))$

RÉSUMÉ

Si l'équation caractéristique admet pour solutions :	Alors la forme générale des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est :
deux racines réelles distinctes r_1 et r_2	$f(x) = A\,\mathrm{e}^{r_1 x} + B\,\mathrm{e}^{r_2 x}$
une racine réelle double r	$f(x) = (Ax + B)\ \mathrm{e}^{rx}$
deux racines complexes conjuguées $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta$	$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\,(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$

Equations différentielles

Du second ordre à coeficients constants sans second membre

Application : y’’-’y’+4y=0

Démontrer que cette équation à pour solution

$$f(x) = (Ax + B)e^{2x}$$

Equations différentielles

Du second ordre à coeficients constants avec second membre

Méthode:

Résolution de l'équation sans second membre solution: S1
La solution S2 est de la forme du second membre (cte si le second membre est cte par exemple
La solution totale est s= S1+S2
La solution totale vérifie l'équation (1), cela permet en général le calcul de certaines ctes.

Le calcul des constantes se détermine d'une part à partir des conditions aux limites

Equations différentielles

Du second ordre à coeficients constants avec second membre

Application : y''-y=x^2-x

Démontrer que cette équation à pour solution

$$f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + x - x^2$$

Si on considère que y(0)=0 et y(1)=1 calculer les ctes.

$$C_2 = \frac{3e - 2}{e^2 - 1} \qquad C_1 = \frac{e(2e - 3)}{e^2 - 1}$$

Développements limités

En zéro

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+O\left(x^{n+1}\right)\\
\operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+O\left(x^{2n+3}\right)\\
\operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+O\left(x^{2n+2}\right)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+O\left(x^{2n+3}\right)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+O\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}
$$

Développements limités

En zéro

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+O\left(x^{n+1}\right)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+O\left(x^{n+1}\right)\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}+O\left(x^{n+1}\right)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+O\left(x^{n+1}\right)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+O\left(x^{n+1}\right)\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n+O\left(x^{n+1}\right)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n+O\left(x^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Cf annexes de mathematiques
Exo thermo comme application

Quelques primitives

On suppose $a > 0$.

Fonction	Primitive	Ensemble de définition de la primitive
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
a^x avec $a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\coth x = -\frac{\cos x}{\sin x}$	$]k\pi, \pi+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$	$]k\pi, \pi+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\tanh^2 x$	$x - \tanh x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$\dfrac{1}{\tanh x}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$]-\infty, -a[$ ou $]-a, a[$ ou $]a, +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$	$]-a, a[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert$	$]-\infty, -a[$ ou $]a, +\infty[$

Opérateurs

En coordonnées cylindriques

$$\mathbf{grad}\, f \left| \begin{array}{l} \partial f / \partial \rho \\ \partial f / \rho\, \partial \varphi \\ \partial f / \partial z \end{array} \right.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\rho\, \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{A} \left| \begin{array}{l} \partial A_z / \rho\, \partial \varphi - \partial A_\varphi / \partial z \\ \partial A_\rho / \partial z - \partial A_z / \partial \rho \\ \partial (\rho A_\varphi) / \rho\, \partial \rho - \partial A_\rho / \rho\, \partial \varphi \end{array} \right.$$

$$\Delta \mathbf{A} \left| \begin{array}{l} \Delta A_\rho \\ \Delta A_\varphi \\ \Delta A_z \end{array} \right.$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 f}{\rho^2\, \partial^2 \varphi} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Opérateurs

En coordonnées sphériques

$$\mathbf{grad}\, f \left| \begin{array}{l} \partial f / \partial r \\ \partial f / r\, \partial \theta \\ \partial f / r \sin\theta\, \partial \varphi \end{array} \right. \qquad \mathrm{div}\, \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big(A_\theta \sin\theta \Big) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{A} \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{r \sin\theta} \left[\dfrac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin\theta) - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\[2ex] \dfrac{1}{r} \left[\dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial}{\partial r} (r\, A_\varphi) \right] \\[2ex] \dfrac{1}{r} \left[\dfrac{\partial}{\partial r} (r\, A_\theta) - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{array} \right. \qquad \Delta \mathbf{A} \left| \begin{array}{l} \Delta A_r \\ \Delta A_\theta \\ \Delta A_\varphi \end{array} \right.$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \sin\theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Opérateurs

Relation et Théorèmes

Théorème du rotationnel (de Stokes ou Ampère)

Avec les mêmes conditions que ci-dessus sur la surface S et le contour C qui le limite :

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = \int_S \mathbf{rot\ A} \cdot \mathbf{ds}$$

Remarque. Le vecteur **dl** est le vecteur élémentaire du système d'axes utilisé, avec le sens positif habituel de ce système. Il n'a pas à être orienté selon le sens du parcours sur C, ce sont les bornes de l'intégrale qui précisent ce sens. Quand la surface S limite un volume, le vecteur **ds** est toujours perpendiculaire à la surface et dirigé vers l'extérieur du volume. Si S ne limite pas un volume mais n'est que la surface limitée par le contour C le long duquel est calculée une circulation, le sens de la circulation fixe le sens du vecteur **ds** :