UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ D'ÉCONOMIE
Année universitaire 2015-2016 - EXAMENS

Année d'étude : Master 1	Enseignant : M.Beaud
Matière : Théorie des jeux	Durée : 2h
Semestre : 1	Session : 1

Documents autorisés : non
Dictionnaires autorisés pour les étudiants non francophones : oui
Calculatrices non programmables autorisées : non

L'utilisation du téléphone portable durant les épreuves est formellement interdite.

Sujet :

Considérez le jeu dynamique à information incomplète et actions observables représenté sur la Figure 1. Ce jeu peut être interprété comme suit. On considère deux joueurs, le joueur 1 et le joueur 2. Il existe une asymétrie d'information concernant le type du joueur 1. Le joueur 1 connaît parfaitement son propre type. Par contre le joueur 2 sait seulement que le joueur 1 est soit de type fort, soit de type faible. Face à cette incertitude, le joueur 2 pense que la probabilité que le joueur 1 soit fort vaut p (et que la probabilité qu'il soit faible vaut 1 - p). On suppose $0<p<1$.

Quel que soit son type, fort ou faible, le joueur 1 est confronté au joueur 2. Le joueur 1 ne peut pas prouver au joueur 2 qu'il est fort ou qu'il est faible, mais il peut cependant lui envoyer un « signal ». En imaginant que le jeu se déroule dans une brasserie, on suppose que le joueur 1 joue en premier et peut soit commander une bière (action **B**), soit commander une quiche (action **Q**). Cette action du joueur 1 est parfaitement observée par le jouer 2 avant que ce dernier décide d'intimider (action **I**) le joueur 1 ou de s'incliner (action **S**) devant lui. Le joueur 2 s'inclinerait s'il savait que le joueur 1 est fort, et l'intimiderait s'il savait qu'il est faible. D'un autre côté, le joueur 1 préfère toujours ne pas être intimidé. Aussi, le joueur 1 préfère la bière s'il est fort, tandis qu'il préfère la quiche s'il est faible.

Tous les éléments ci-dessus sont connaissance commune.

Pour le joueur 1, on note x_F la probabilité qu'il joue **B** dans l'ensemble d'information 1.F (s'il est fort) et on note x_f la probabilité qu'il joue **B** dans l'ensemble d'information 1.f (s'il est faible). Pour le joueur 2, on note y_B la probabilité qu'il joue **I** dans l'ensemble d'information 2.B (s'il observe que le joueur 1 boit une bière) et on note y_Q la probabilité qu'il joue **I** dans l'ensemble d'information 2.Q (s'il observe que le joueur 1 mange une quiche).

<u>Sujet (suite)</u> :

De plus, on note β la probabilité que le joueur 1 soit fort sachant qu'il boit une bière (sachant que l'ensemble d'information 2.B est atteint), et on note θ la probabilité que le joueur 1 soit fort sachant qu'il mange une quiche (sachant que l'ensemble d'information 2.Q est atteint).

1. On suppose $p=\frac{9}{10}$. Représentez le jeu sous forme normale, c'est-à-dire construire la matrice des paiements. Vous noterez par exemple **BQ** une stratégie conditionnelle du joueur 1 consistant à jouer **B** s'il est fort (en 1.F) et **Q** s'il est faible (en 1.f). Aussi, vous noterez par exemple **IS** une stratégie conditionnelle du joueur 2 consistant à jouer **I** s'il observe **B** (en 2.B) et à jouer **S** s'il observe **Q** (en 2.Q). *(4 points)*

2. Identifier les deux équilibres de Nash en stratégies pures. Pour chaque équilibre, donner la stratégie effectivement jouée par le joueur 2 à l'équilibre. *(2 points)*

3. Considérez les deux équilibres de Nash en stratégies pures identifiés ci-dessus. Pour chaque équilibre, ajouter une condition (concernant la valeur de β ou celle de θ) afin qu'il soit un équilibre de Nash bayésien parfait. *(2 points)*

4. En utilisant le critère intuitif, remettre en question les conditions sur les croyances du joueur 2 établies à la question précédente et sélectionner un des deux équilibres bayésiens parfaits. *(1,5 points)*

5. On suppose désormais que $p=\frac{1}{3}$. Réduire le jeu en éliminant les stratégies strictement dominées. La combinaison de stratégies $\frac{1}{2}$**BB** + $\frac{1}{2}$**BQ** face à $\frac{1}{2}$**II** + $\frac{1}{2}$**SI** forme-t-elle un équilibre de Nash ? Même question pour $\frac{3}{4}$**BB** + $\frac{1}{4}$**BQ** face à $\frac{1}{4}$**IS** + $\frac{3}{4}$**SI**. Même question pour $\frac{1}{2}$**BB** + $\frac{1}{2}$**QQ** face à $\frac{5}{12}$**IS** + $\frac{7}{12}$**SI**. *(4,5 points)*

6. Traduire les stratégies mixtes à l'unique équilibre de Nash $\frac{1}{2}$**BB** + $\frac{1}{2}$**BQ** face à $\frac{1}{2}$**II** + $\frac{1}{2}$**SI** en stratégies de comportement, c'est-à-dire donner x_F, x_f , y_B et y_Q. *(2 points)*

7. En utilisant la règle de Bayes, calculer les probabilités conditionnelles β et θ à l'unique équilibre de Nash. *(2 points)*

8. Pour chaque joueur, vérifier si la rationalité séquentielle est satisfaite à chaque ensemble d'information (sachant que cet ensemble est atteint). *(2 points)*