2] Pour $x \in [0,+\infty[$ on a ① $\left(\dfrac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \searrow$ (produit de 2 decroissantes ≥ 0)

② $\|u_n(x)\|_\infty = \dfrac{1}{2n+1}$

Par Leibniz : $\sum (-1)^n \|u_n\|_\infty = \sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$ CV

Par Leibniz uniforme : $\left.\begin{array}{l} S \text{ CVU sur } I \\ u_n(x) \text{ continue sur } I \end{array}\right\}$ $\boxed{S \text{ continue sur } I}$

3] $u_n'(x) = (-1)^n e^{-(2n+1)x} = e^{-x}\left(-e^{-2x}\right)^n.$

$\sum u_n'(x)$ est une serie geometrique.

Pour $x \geq a$ on a $|u_n'(x)| \leq e^{-a} e^{-2na}$

d'où $\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq e^{-a} e^{-2na}$ (en fait $=$)

$\sum u_n'(x)$ CVN sur $[a,+\infty[$ car $\sum e^{-2an}$ CV (geom raison $e^{-2a} < 1$)

Thm de dérivation $\boxed{S \text{ derivable sur } [a,+\infty[\text{ et } S'(x) = \sum u_n'(x)}$