Exercice 1

- $f_1(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ → Si $x_0 \neq 0$ alors

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en x_0 et $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc par composition

$x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable en x_0. Or $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc $x \mapsto x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable en x_0 comme prod. de f° dérivable en x_0

→ Si $x = 0$ alors $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

OR $\forall x \neq 0$, $-x \leq x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

$\Rightarrow x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, on conclue que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $f_2(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ → Si $x_0 \neq 0$ alors pas de problème

Montrons que f_2 n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

OR $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin(x)$

OR pour $u_n = 2n\pi$, on a $2n\pi \sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\sin(2n\pi) = 0$

$v_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi \sin\left(\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$

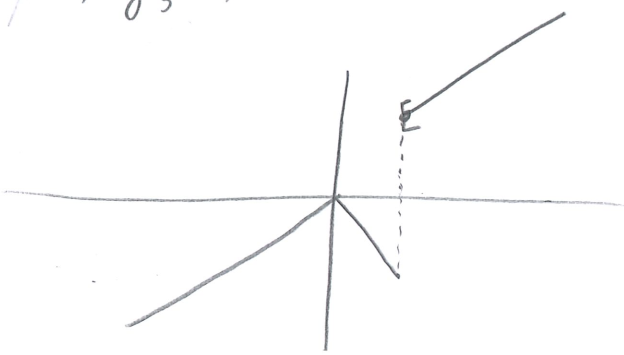
Donc, pas de limite.

- $f_3(x) = \dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ si $x \neq 1$, $f_3(1) = 1$.

$$= \frac{\sqrt{x^4-2x^3+x^2}}{x-1} = \frac{|x(x-1)|}{(x-1)}$$

$$= |x| \frac{|x-1|}{(x-1)} \text{ si } x \neq 1, \quad f_3(1) = 1 \text{ sinon}$$

⚠ $\dfrac{|x-1|}{(x-1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$



donc f_3 est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 2 :

$f : x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \longrightarrow$ OK sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

$\rightarrow$ on cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

OR $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

ET $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{ax^2+bx+1-1}{x-1}$.

si $a+b+1 \neq 1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = \infty$.

sinon $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = (ax^2+bx+1)'(1) = 2a+b$

$\Rightarrow a+b = 0$, $2a+b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 :

1) Soit $f : x \mapsto e^{3x+2}$, on a

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x}$$

OR f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc cette limite existe et on a $f'(x) = 3e^{3x+2}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x} = 3e^2.$$

2) Soit $f : x \mapsto \cos(x)$, on a.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = f'(0) = -\sin(0) = 0.$$

3) Soit $f : x \mapsto \ln(2-x)$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(2-x) - \ln(1)}{x-1} = \frac{\ln(2-x)}{x-1}.$$

OR $\ln(2-x)' = \dfrac{1}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(2-x)}{x-1} = -1.$

4) $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$, $f'(x) = -\sin(x) e^{\cos(x)}$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos(x)} - e^{\cos(\frac{\pi}{2})}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos(x)} - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = -1.$$

Exercice 4

- $P : x \mapsto x^n + ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = n x^{n-1} + a$.

- Si P admet au moins quatres racines alors on peut trouver $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ tel que $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = 0$.

- Par le théorème de Rolle, il vient que

$\exists\, c_1 \in]x_1, x_2[, \; P'(c_1) = 0$

$\exists\, c_2 \in]x_2, x_3[, \; P'(c_2) = 0$

$\exists\, c_3 \in]x_3, x_4[, \; P'(c_3) = 0$

Donc $P'(x) = 0 \iff x^{n-1} = -\frac{a}{n}$

↳ si n est paire alors $n-1$ est impaire et donc

$P'(x) = 0 \iff x = -\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}$.

↳ si n est impaire alors $n-1$ est paire et donc, si $a > 0$, $P'(x) = 0$ n'admet pas de solut° réel. Si $a \leq 0$ alors

$P'(x) = 0 \iff x = \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}}$ ou $x = -\sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}}$

→ On remarque alors que $P'(x) = 0$ admet au plus 2 solut° ce qui contredit le fait que P admet au moins 4 racines.

Par l'absurde, on en conclu que P admet au plus 3 racines.

Exercice 5

- $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.
- $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$

1) Supposons que $\exists x_0 \in]a, b[$ tq $g(x_0) = g(a)$

alors en posant $h(x) = g(x) - g(a)$ on a h continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a ; b[$ et $h'(x) = g'(x) \neq 0$

De plus $h(x_0) = h(a)$

Par le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, x_0[$ tq $h'(c) = 0$ ce qui est impossible. Par l'absurde, $\forall x \in]a, b[$, $h'(x) = g'(x) \neq 0$.

2) $p = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$, $h(x) = f(x) - p\, g(x)$ $(\forall x \in [a, b])$

h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a)$$

$$= \frac{f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - g(a)f(b) + \cancel{g(a)f(a)}}{g(b) - g(a)} = \frac{f(a)g(b) - g(a)f(b)}{g(b) - g(a)}$$

$$h(b) = \frac{\cancel{f(b)g(b)} - g(a)f(b) - \cancel{f(b)g(b)} + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(a)g(b) - g(a)f(b)}{g(b) - g(a)}$$

Ainsi, par le théorème de Rolle, $\exists c \in]a,b[$

tq $h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - r g'(c) = 0$

$\Rightarrow r = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}.$

3) On remarque que les points 1) et 2) restent valable en remplaçant a par $x \in]a,b[$. Ainsi,

$\forall x \in]a,b[$, $\exists c_x \in]x, b[$ tq

$$\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

OR d'une part $x < c_x < b \Rightarrow \lim\limits_{x \to b^-} c_x = b$
et $c_x < b$.

donc $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$

4) • arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et continue sur $[-1,1]$

et $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos(1) = 0$

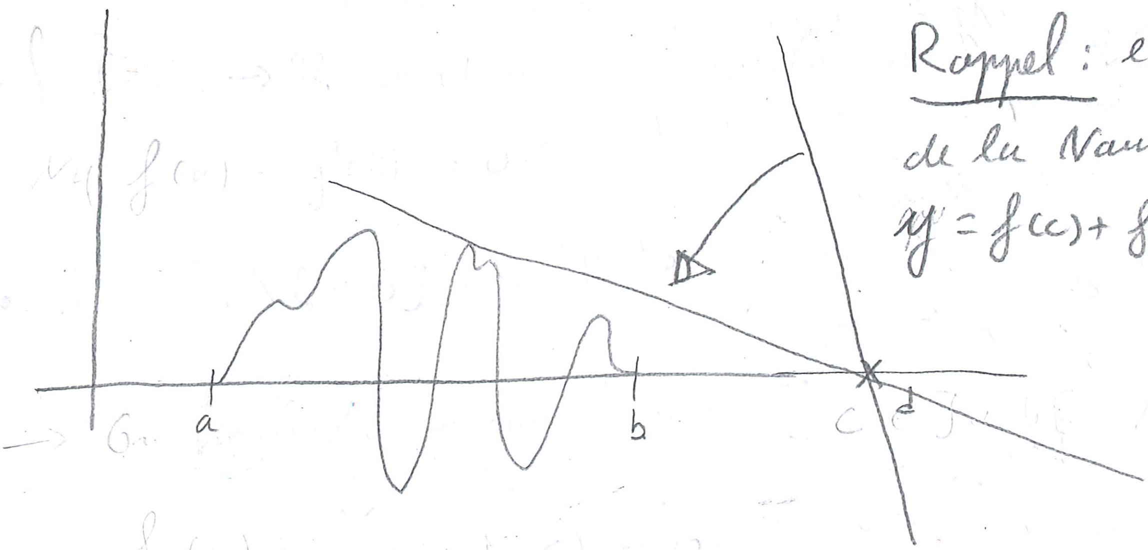
• $\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et continue sur $[-1,1]$

et $(\sqrt{1-x^2})' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$, $\sqrt{1-0^2} = 0$

Par ce qui précède.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1/\sqrt{1-x^2}}{-x/\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Exercice 6 :



Rappel : équation de la tangente en c :
$y = f(c) + f'(c)(x-c)$

Graphiquement, on remarque que si on "pose" une droite passant par $(d,0)$ sur la courbe de f alors elle touchera de manière tangente. "Poser" une droite passant par $(d,0)$ revient à maximiser le coefficient directeur entre $(x, f(x))$ et $(d,0)$. Cela nous fait étudier

$$g : x \longmapsto \frac{f(x)-0}{x-d} = \frac{f(x)}{x-d}$$

→ Cette fonction est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(a) = g(b) = 0$.

Ainsi on peut appliquer Rolle sur g :

$\exists c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = \dfrac{f'(c)(c-d) - f(c)}{(c-d)^2} = 0.$

$\Leftrightarrow f'(c)(c-d) - f(c) = 0$

$\Leftrightarrow f(c) + f'(c)(d-c) = 0.$

↳ ce qui prouve que la tangeante passant par $(c, f(c))$ passe par $(d, 0)$.

Exercice 7

1) $x \mapsto \arctan(x)$ est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc par le TAF.

$\exists c \in]x,y[$ tq $\dfrac{\arctan(x) - \arctan(y)}{x-y} = \arctan'(c)$

OR $\arctan'(c) = \dfrac{1}{1+c^2} \leq 1$

$\Rightarrow \left|\dfrac{\arctan(x) - \arctan(y)}{x-y}\right| \leq \left|\dfrac{1}{1+c^2}\right| \leq 1.$

$\Rightarrow |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$

2) $x \mapsto e^x$ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ donc par le TAF,

$\exists c \in]0,x[$, $\dfrac{e^x - 1}{x} = e^c$, OR comme e^x est croissante, $0 \leq c \leq x \Rightarrow 1 \leq e^c \leq e^x$

et donc $x \leq e^x - 1 \leq x e^x$

Exercice 8 :

1) $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ donc d'après le TDF,

$$\exists c \in]x, y[\text{ tq } \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x} = \frac{1}{c}$$

OR $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x} < \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow x < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y.$$

2) $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a \longmapsto \ln(ax + (1-a)y) - (a\ln(x) + (1-a)\ln(y))$$

$\hookrightarrow f'(a) = \frac{x - y}{ax + (1-a)y} - (\ln(x) - \ln(y))$

$\hookrightarrow f'(a) > 0 \Leftrightarrow \ln(y) - \ln(x) > \frac{y - x}{ax + (1-a)y}$

$$\Leftrightarrow ax + (1-a)y > \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)}$$

on pose $c = \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)}$, $ax + (1-a)y \leq c$

$\Leftrightarrow a(x - y) \leq c - y \Leftrightarrow a \geq \frac{y - c}{y - x} = a_0.$

• Par la question 1), $a_0 \in]0, 1[$.

donc f est strictement croissante sur $[0, a_0]$ et strictement décroissante sur $[a_0, 1]$ et donc

$\forall a \in]0,1[\,,\ f(a) > 0$

$\Rightarrow \ln(ax + (1-a)y) > a\ln(x) + (1-a)\ln(y)$

Exercice 9 :

1) Soit $x > 0$, ln est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$ donc par le TAF,

$$\exists c \in]x, x+1[\text{ tq } \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{(x+1) - x} = \frac{1}{c}.$$

OR $x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2) $v_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$

OR $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!],\ \frac{1}{k} > \ln(k+1) - \ln(k)$

$$\Rightarrow v_n > \left(\ln\cancel{(n+2)} - \ln(n+1)\right) + \left(\ln\cancel{(n+3)} - \ln\cancel{(n+2)}\right)$$

$$+ \dots$$

$$+ \left(\ln\cancel{(2n)} - \ln\cancel{(2n-1)}\right) + \left(\ln(2n+1) - \ln\cancel{(2n)}\right)$$

$$= \ln(2n+1) - \ln(n+1)$$

De la même manière $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$,

$$\frac{1}{k} < \ln(k) - \ln(k-1)$$

$$\Rightarrow v_n < (\ln(\cancel{n+1}) - \ln(n)) + (\ln(\cancel{n+2}) - \ln(\cancel{n+1}))$$

$$+ \ldots$$

$$+ (\ln(\cancel{2n-1}) - \ln(\cancel{2n-2})) + (\ln(2n) - \ln(\cancel{2n-1}))$$

$$= \ln(2n) - \ln(n)$$

(le fait que les termes se simplifient 2 à 2 dans une somme de plusieurs termes s'appelle le TELESCOPAGE).

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) < v_n < \ln(2)$$

OR $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} + \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

$\rightarrow$ Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \ln(2).$$