TD 6 : Diagonalisation

Exercice 1 :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix}$$

1) $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

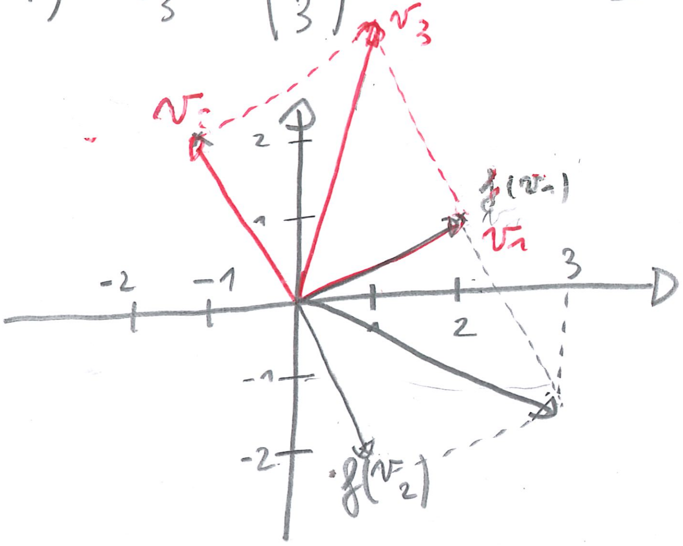
2) $f(v_1) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\times 2+4 \\ 4\times 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$

donc v_1 est un $\overrightarrow{VP}$ associé à la VP 1.

3) $f(v_2) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3+2\times 4 \\ -4-2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -v_2$

donc v_2 est un $\overrightarrow{VP}$ associé à la VP -1

4) $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = v_1 + v_2$ donc $f(v_3) = f(v_1) + f(v_2)$
$= v_1 - v_2$



$f(v_3) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+4\times 3 \\ 4-3\times 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (on va dire que ça se voit sur le schéma ...)

5) $\det((v_1, v_2)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$

donc (v_1, v_2) est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^2$ (car 2 vecteurs).

6) $f(v_1) = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(v_1, v_2)}$

$f(v_2) = -v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{(v_1, v_2)}$

DONC la matrice de f dans la base (v_1, v_2) s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7) $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, par la formule d'inversion d'une matrice 2x2, on a

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

8) Formule de changement de Base

$$A = PDP^{-1}$$

9) $A^n = A \times A \times A \times \cdots \times A$

$$= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})$$

$$= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}$$

$$= PDDD\cdots DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

OR $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow PD^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -(-1)^n \\ 1 & 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -(-1)^n \\ 1 & 2(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+(-1)^n & 2-2(-1)^n \\ 2-2(-1)^n & 1+4(-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda x & (1) \\ y+z = \lambda y & (2) \\ y - z = \lambda z & (3) \end{cases}$$

1er cas : $\lambda = 1$

$\rightarrow (1)\ x \in \mathbb{R}$

$\rightarrow (2)\ z = 0,\ (3)\ y = 0$

1 est VP et $E_1(A) = \text{Vect}((1,0,0))$

2ème cas : $\lambda \neq 1$. $\Rightarrow x = 0$

$$\begin{cases} (1-\lambda)\, y + z = 0 \\ y - (1+\lambda) z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1+\lambda) \\ 1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)\, y + z = 0 \\ [(1-\lambda)(1+\lambda)+1]\, y = 0 \end{cases}$$

$(1-\lambda)(1+\lambda) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2}$ ou $\lambda = -\sqrt{2}$

si $\lambda = \sqrt{2}$ alors $z = (\sqrt{2} - 1)\, y$

et donc $\sqrt{2}$ est VP et $E_{\sqrt{2}}(A) = \text{Vect}((0, 1, \sqrt{2} - 1))$

si $\lambda = -\sqrt{2}$ alors $z = -(1+\sqrt{2})\, y$

et donc $-\sqrt{2}$ est VP et $E_{-\sqrt{2}}(A) = \text{Vect}((0, 1, -1-\sqrt{2}))$

• $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $(B - \lambda I_d) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)\, x - y - z = 0 \\ -x + (a^2 - \lambda)\, y = 0 \\ -x + (a^2 - \lambda)\, z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (a^2 - \lambda) \\ 1 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x - y - z = 0 \\ ((1-\lambda)(a^2-\lambda)-1)x - (a^2-\lambda)z = 0 & 1 \\ -x + (a^2-\lambda)z = 0 & 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x - y - z = 0 \\ ((1-\lambda)(a^2-\lambda)-1)x - (a^2-\lambda)z = 0. \\ ((1-\lambda)(a^2-\lambda)-2)x = 0. \end{cases}$$

$((1-\lambda)(a^2-\lambda)-2 = 0 \iff \lambda^2 - (a^2+1)\lambda + (a^2-2) = 0.$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (a^2+1)^2 - 4(a^2-2) \\ &= a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 + 8 \\ &= a^4 - 2a^2 + 9 \end{aligned}$$

$\Delta'_2 = 4 - 4\times 9 = -32 < 0.$

donc $\Delta > 0$ et donc $(1-\lambda)(a^2-\lambda) - 2 = 0$

$$\iff \lambda = \lambda_1 = \frac{(a^2+1) + \sqrt{a^4-2a^2+9}}{2}$$

$$\text{ou } \lambda = \lambda_2 = \frac{(a^2+1) - \sqrt{a^4-2a^2+9}}{2}$$

<u>1^er cas :</u> $((1-\lambda)(a^2-\lambda)-2) \neq 0 \Rightarrow x = 0.$

et le système devient.

$$\begin{cases} -y - z = 0 \\ (a^2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

si $\lambda \neq a^2$ alors $x = y = z = 0$

si $\lambda = a^2$ alors $z = -y$ et $x = 0$

donc a^2 est VP et $E_{a^2}(B) = \text{Vect}((0,1,-1))$

2ème cas : $(1-\lambda)(a^2-\lambda)-2=0 \iff \lambda=\lambda_1$ ou $\lambda=\lambda_2$

et le système devient

$$\begin{cases} (1-\lambda_i)x - y - z = 0 \\ ((1-\lambda_i)(a^2-\lambda_i)-1)x - (a^2-\lambda_i)z = 0 \end{cases}$$

OR $((1-\lambda_i)(a^2-\lambda_i)-1) = \underbrace{((1-\lambda_i)(a^2-\lambda_i)-2)}_{=0}+1 = 1$

$$\begin{cases} (1-\lambda_i)x - y - z = 0 & (1) \\ x-(a^2-\lambda_i)z = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) : $x = (a^2-\lambda_i)z$

(1) : $(1-\lambda_i)(a^2-\lambda_i)z - y - z = 0$

$\Rightarrow 2z - y - z = 0$

$\Rightarrow y = z$

λ_1 est VP et $E_{\lambda_1}(B) = \text{Vect}((a^2-\lambda_1), 1, 1)$

λ_2 ——— $E_{\lambda_2}(B) = \text{Vect}((a^2-\lambda_2), 1, 1)$

Exercice 3 ⚠ il faut trouver P et B tels que $\boxed{B = P^{-1}AP}$

(et non $B = PAP^{-1}$)

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} x \\ (1-\lambda) y - 4z = 0 \\ -4y + (1-\lambda) z = 0 \end{cases}$

1er cas : $\lambda = 2$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} -y - 4z = 0 \\ -4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = z = 0$

donc 2 est VP et $E_2(A) = \mathrm{Vect}((1,0,0))$

2ème cas : $\lambda \neq 2 \Rightarrow x = 0$ et

$\begin{cases} (1-\lambda) y - 4z = 0 & (1-\lambda) \\ -4y + (1-\lambda) z = 0 & 4 \end{cases}$

$\begin{cases} (1-\lambda) y - 4z = 0 \\ ((1-\lambda)^2 - 16) y = 0 \end{cases}$

$(1-\lambda)^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 16$

$\Leftrightarrow 1 - \lambda = \pm 4$

$\Leftrightarrow \lambda = 5$ ou $\lambda = -3$

Si $\lambda \notin \{-3, 2, 5\}$ alors $x = y = z = 0$

Si $\lambda = -3$: $x = 0$ et $y = z$.

$\rightarrow$ -3 est VP et $E_{-3}(A) = \text{Vect}((0,1,1))$

Si $\lambda = 5$: $x = 0$ et $y = -z$

$\rightarrow$ 5 est VP et $E_5(A) = \text{Vect}((0,1,-1))$

Conclusion : $\dim(E_{-3}(A)) + \dim(E_2(A)) + \dim(E_5(A)) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + z = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ x + (1-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

1^{er} cas : $\lambda = 1 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$ et $x = z = 0$

$\Rightarrow 1$ est VP et $E_1(A) = \text{Vect}((0,1,0))$

$2^{ème}$ cas : $\lambda \neq 1 \Rightarrow y = 0$ et

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + z = 0 \\ x + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{|l} (1-\lambda) \\ \ominus \quad 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + z = 0 \\ ((1-\lambda)^2 - 1)x = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{|l} (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \lambda = \pm 1 \\ \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2 \end{array}$$

si $\lambda \notin \{0,1,2\}$, $x = y = z = 0$

si $\lambda = 0 \Rightarrow z = -x$ et $y = 0$

donc 0 est VP et $E_0(A) = \text{Vect}((-1,0,1))$

si $\lambda = 2 \Rightarrow z = x$ et $y = 0$

donc 2 est VP et $E_2(A) = \text{Vect}((1,0,1))$

ccl : $\dim(E_0(A)) + \dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 3$

donc $B = P^{-1}AP$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

→ Cette fois-ci, la matrice étant trop compliqué, on va utiliser la méthode du cours

$$\det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 & -9 \\ -2 & -(1+\lambda) & 2 \\ 2 & -1 & -(4+\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (7-\lambda)\left[(1+\lambda)(4+\lambda)+2\right] - 3\left[2(4+\lambda)-4\right] - 9\left[2+2(1+\lambda)\right]$$

$$= (7-\lambda)\left[(1+\lambda)(4+\lambda)+2\right] - 3\left[8+2\lambda-4+3(4+2\lambda)\right]$$

$$= (7-\lambda)\left[(1+\lambda)(4+\lambda)+2\right] \underbrace{-3\left[4+2\lambda+12+6\lambda\right]}_{=-3(8\lambda+16) = -24(\lambda+2)}$$

OR $(1+\lambda)(4+\lambda)+2 = 0 \iff \lambda^2+5\lambda+6=0$.

$\Delta = 25 - 4\times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$.

$\Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{-5-1}{2} = -3$, $\quad \lambda_2 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$

$\Rightarrow (1+\lambda)(4+\lambda)+2 = (\lambda+2)(\lambda+3)$

Finalement, $\det(A-\lambda I_d) = (7-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+3) - 24(\lambda+2)$

$= (\lambda+2)\left[(7-\lambda)(\lambda+3) - 24\right]$

→ $\det(A-\lambda I_d) = 0 \iff \lambda = -2$

ou $(7-\lambda)(\lambda+3) - 24 = 0$

$\iff -\lambda^2 + 4\lambda + 21 - 24 = 0$

$\iff -\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4 = 2^2$

$\lambda_1 = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{-4-2}{-2} = 3$

cl : $S_p(A) = \{1, -2, 3\}$

→ $(A - I_d)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 6x + 3y - 9z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} -1 & -1 \\ 2 & \\ & 1 \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ \cancel{-2y - 2z = 0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y.$$

donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\,((-2, 1, -1)$

$$\rightarrow (A + 2I_d)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 3y - 9z = 0. \\ -2x + y + 2z = 0. \\ \cancel{2x - y - 2z = 0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 3z = 0. & 1 \\ -2x + y + 2z = 0 & -1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z. \\ y = 0. \end{cases}$$

$E_2(A) = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 1))$.

$$\to \quad (A - 3I_d)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 9z = 0 & 1 \quad -1 \\ -x - 2y + z = 0 & 4 \\ 2x - y - 7z = 0 & 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 9z = 0 \\ -5y - 5z = 0 \\ \cancel{-5y - 5z = 0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 12y = 0 \Rightarrow x = -3y \\ z = -y \end{cases}$$

$$E_3(A) = \text{Vect}((-3, 1, -1))$$

cl : $B = P^{-1}AP$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

1) $\det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} -(3+\lambda) & -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$-1 \quad 1$

$= \begin{vmatrix} -(3+\lambda) & -2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1+\lambda \\ 2 & 2 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$ $\quad 1 \quad 1$

$= \begin{vmatrix} -(3+\lambda) & -2 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$

$= -(1+\lambda)\left[-(3+\lambda)(3-\lambda) + 8\right]$

$= (1+\lambda)\left[9 - \lambda^2 - 8\right]$

$= (1+\lambda)(1-\lambda^2) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)$

$\Rightarrow \det(A - \lambda I_d) = 0 \iff \lambda_0 = -1, \ \lambda_1 = 1.$

2) a)

$(A + I_d)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \cancel{-2x - 2y - 2z = 0} \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ \cancel{2x + 2y + 2z = 0} \end{cases}$

$\iff z = -x - y \Rightarrow \mathrm{Ker}(A + I_d) = \mathrm{Vect}\left((1, 0, -1), (0, 1, -1)\right)$

donc $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est une FG de $\mathrm{Ker}(A+I_d)$ et c'est aussi une FL (position des 0) c'est donc une base.

$$(A-I_d)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}-4x-2y-2z=0\\2x+2z=0\\2x+2y=0\end{cases} \iff \begin{cases}-2x-y-z=0\\x+z=0\\x+y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}z=-x\\y=-x\\\cancel{0x=0}\end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A-I_d)=\mathrm{Vect}((1,-1,-1))$

OR $(1,-1,-1)\neq 0$ donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(A-I_d)$.

2) b) Comme $\dim(\mathrm{Ker}(A+I_d))+\dim(\mathrm{Ker}(A-I_d))=3$, et que $\mathrm{Ker}(A+I_d)$ et $\mathrm{Ker}(A-I_d)$ sont en somme directe, la concaténation de leur base forme une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, en notant $u=(1,0,-1)$, $v=(0,1,-1)$ et $w=(1,-1,-1)$, on a $Au=-u$, $Av=-v$ et $Aw=w$ donc.

$$A = PBP^{-1} \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

1) $Mv_1 = v_1$, $Mv_2 = -2v_2$.

2) $\{v_1, v_2\}$ forment une famille libre, donc une base et on a

$$M = PBP^{-1} \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi
$$\begin{aligned} M^n &= (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1}) \\ &= PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P) \cdots (P^{-1}P)BP^{-1} \\ &= PB^nP^{-1} \end{aligned}$$

OR
$$P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

DONC $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ (-2)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^n \\ 2 + (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 6 :</u>

$$M^2 = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^2 + M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 I_d$$

Ainsi pour $\mu = 2$, on a $M^2 + M - \mu I_d = 0$.

Si $M^2 + M - 2I_d = 0$

$\Rightarrow M^2 + M = 2I_d$.

$\Rightarrow M\left(\frac{M+I_d}{2}\right) = \left(\frac{M+I_d}{2}\right)M = I_d$.

donc M^{-1} existe et vaut $\left(\frac{M+I_d}{2}\right)$

3) $\det(M - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} -(1/2+\lambda) & -3/4 & 3/4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 3/2 & -(1/2+\lambda) \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\left[(1/2+\lambda)^2 - 9/4\right]$

$= (1-\lambda)\left[1/4 + \lambda + \lambda^2 - 9/4\right]$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2)$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -2$

Ainsi $\chi(\lambda)$ et $\lambda^2 + \lambda - 2$ ont les mêmes racines.