TD 4

Exercice 1 :

1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longmapsto (x-y,\ 2x+z,\ x+3y-z)$

$f(1,0,0) = (1,2,1)$
$f(0,1,0) = (-1,0,3)$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$f(0,0,1) = (0,1,-1)$

(on aurait pu aller plus vite).

2) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto e^{i\alpha} z$

- Si $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel alors $A = (e^{i\alpha})$ (car une base est $\{1\}$)

- Si $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel alors une base de $\mathbb{C}$ est $\{1, i\}$ donc

$f(1) = e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$
$f(i) = ie^{i\alpha} = i\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = -\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

3) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ où $q(x) = p(x-2)$

$p \longmapsto q$

une base de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\{1, x, x^2\}$

$f(1) = 1$

$f(x) = x - 2$

$f(x^2) = (x-2)^2 = x^2 - 2x + 4$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$

$p \longmapsto \int_0^1 p(x)\, dx$

$$\int_0^1 ax^2 + bx + c \, dx = a\int_0^1 x^2\, dx + b\int_0^1 x\, dx + c$$

$$= a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + b\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + c$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

$f(1) = 1$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x^2) = \frac{1}{3}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ y - 2z \\ z \end{pmatrix}$$

1) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \mapsto (x - y + z, y - 2z, z)$$

2) $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$

$$a + bx + cx^2 \mapsto (a-b+c) + (b-2c)x + cx^2$$

3) $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$

$$a + bx + cx^2 \mapsto (a-b+c, b-2c, c)$$

Exercice 3 : $\boxed{E = \mathbb{K}^n}$

$\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi \circ \varphi = \varphi$

1) Soit $u \in Ker(\varphi) \cap Im(\varphi)$

alors $\varphi(u) = 0$ et $\exists v \in \mathbb{K}^n$ tq $u = \varphi(v)$

$\Rightarrow u = \varphi(v) = \varphi(\varphi(v)) = \varphi(u) = 0$

donc $Ker(\varphi) \cap Im(\varphi)$

2) $\varphi(x - \varphi(x)) = \varphi(x) - \varphi(\varphi(x)) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$

donc $x - \varphi(x) \in Ker(\varphi)$

donc $x = \underbrace{\varphi(x)}_{\in Im(\varphi)} + \underbrace{x - \varphi(x)}_{\in Ker(\varphi)} \Rightarrow E = Ker(\varphi) + Im(\varphi)$.

3) • Par les questions 1 et 2, on a

$$\mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi) = E$$

DONC, en prenant $\mathcal{E}_I$ une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathcal{E}_K$ une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\mathcal{E} = \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_K$ une famille génératrice de E car $\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Ker}(\varphi) = E$.

De plus $\mathcal{E}$ est libre car $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ donc $\mathcal{E}$ est une base de E.

4) Si $x \in \mathrm{Im}(\varphi)$, $\exists\, y \in E$ tq $\varphi(y) = x$.

$$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(\varphi(y)) = \varphi(y) = x$$

5) Soit $m = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$ et soit

$$\mathcal{E}_I = \{u_i\}_{i \in [1,m]}, \quad \mathcal{E}_K = \{v_j\}_{j \in [1,n-m]}$$

on a $\forall i \in [1,m]$, $\varphi(u_i) = u_i = \begin{array}{c l} \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}\right] n & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$

et $\forall j \in [1,n-m]$, $\varphi(v_j) = 0 = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}\right] n$.

Ainsi, la matrice de φ dans $\mathcal{E}$ s'écrit

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ m \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \end{array} \\ \quad m \qquad n \end{array}$$

Exercice 4 :

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1) • Soit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tq $\varphi(e) = 2e$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 25y = 2x \\ -x - 3y = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 25y = 0 \\ \cancel{-x - 5y = 0} \end{cases} \Leftrightarrow x = -5y.$$

Ainsi, $e = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\varphi(e) = 2e$.

• Soit $\tilde{e} = \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$, $\varphi(\tilde{e}) = 2\tilde{e}+e$

$$\iff \begin{cases} 5\tilde{x}+25\tilde{y} = -5. \\ \cancel{-\tilde{x}-5\tilde{y}=1} \end{cases}$$

$$\iff \tilde{x} = -1-5\tilde{y}$$

donc $\tilde{e} = \begin{pmatrix}-6\\ 1\end{pmatrix}$ vérifie $\varphi(\tilde{e}) = 2\tilde{e}+e$.

2) • $\det((e,\tilde{e})) = \begin{vmatrix}-5 & -6\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -5+6 = 1 \neq 0.$

donc $(e,\tilde{e})$ est libre et contient 2 vecteurs ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

• $\varphi(e) = 2e = \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$

$\varphi(\tilde{e}) = e+2\tilde{e} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$.

donc la matrice de φ dans $\mathcal{E} = (e,\tilde{e})$ est

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Exercice 5:

- $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

- Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ où

$$\tilde{e}_1 = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$
$$\tilde{e}_2 = e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$
$$\tilde{e}_3 = e_1 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}.$$

- Si $\tilde{A}$ est la matrice de φ dans la base $\tilde{\mathcal{E}}$ alors la formule de changement de base pour les matrices nous donne :

$$\tilde{A} = P^{-1} A P$$

où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

→ Calculons P^{-1}. On cherche P^{-1} tq $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + z = \tilde{x} \\ x + y = \tilde{y} \\ y + z = \tilde{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = \tilde{x} \\ y - z = \tilde{y} - \tilde{x} \\ y + z = \tilde{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = \tilde{x} & (1) \\ y - z = \tilde{y} - \tilde{x} & (2) \\ 2z = \tilde{x} - \tilde{y} + \tilde{z} & (3) \end{cases}$$

(3) : $z = \frac{1}{2}\tilde{x} - \frac{1}{2}\tilde{y} + \frac{1}{2}\tilde{z}$, (2) : $y = -\frac{1}{2}\tilde{x} + \frac{1}{2}\tilde{y} + \frac{1}{2}\tilde{z}$, (1) : $x = \frac{1}{2}\tilde{x} + \frac{1}{2}\tilde{y} - \frac{1}{2}\tilde{z}$

On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

OR
$$AP = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>remarque</u> : une autre méthode + rapide mais plus difficile aurait été de remarquer que.

$$A\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\tilde{\varepsilon}}$$

$$A\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\tilde{e}_1 + \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\tilde{\varepsilon}}$$

$$A\tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\tilde{\varepsilon}}$$

et donc par construction que $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) • $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -12 & 8 & 4 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$

$\Rightarrow \varphi \circ \varphi(x) = A(Ax) = A^2 x = 2Ax = 2\varphi(x)$

• Si $\exists x \in \mathbb{R}^3$ tq $e = \varphi(x)$

alors $\varphi(e) = \varphi(\varphi(x)) = 2\varphi(x) = 2e$

3) • $x = \left(x - \frac{1}{2}\varphi(x)\right) + \frac{1}{2}\varphi(x)$.

$\frac{1}{2}\varphi(x) \in \mathrm{Im}(\varphi)$

$\varphi\left(x - \frac{1}{2}\varphi(x)\right) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi^2(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$.

$\Rightarrow x - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^3$

• $e \in \mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow 2e = \varphi(e) = 0 \Rightarrow e = 0$

donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont supplémentaire

4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -6x + 4y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ \cancel{-2y + 4z = 0} \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - 2z + z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}((-1, -2, 1))$

$\Rightarrow rg(\varphi) = 2$ donc il faut 2 vecteurs linéairement indépendant pour avoir une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$

Par exemple $\{(1, 4, -1), (1, 2, 1)\}$.

$\Rightarrow$ Une base de $\mathbb{R}^3$ est donc, par concaténation des bases de 2 espaces supplémentaire,

$\mathcal{E} = ((-1, -2, 1), (1, 4, -1), (1, 2, 1))$

$\rightarrow$ La matrice de φ dans cette base est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11

5) • Si $u \in \mathrm{Im}(\varphi)$ alors les coordonnées de u dans $\mathcal{E}$, que l'on note (x', y', z') vérifient

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 2\beta \\ z' = 2\gamma \end{cases}$$

Finalement, $u \in \mathrm{Im}(\varphi) \Leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$.

• Pour trouver l'équation vérifiée par les coordonnées de u dans la base canonique, il faut utiliser la formule de changement de base. Par cette formule, en notant (x, y, z) les coordonnées de u dans la base canonique, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' + z' & 4 & 1 \\ y = 4y' + 2z' & -1 & \\ z = -y' + z' & & 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y' + z' \\ 4x - y = 2z' \\ x + z = 2z' \end{cases} \Leftrightarrow 4x - y = x + z \Leftrightarrow \boxed{3x - y - z = 0}$$

<u>remarque</u> : Une méthode + rapide est de chercher directement (x,y,z) tq $\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$

tq $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha+\beta+\gamma & \\ y = -6\alpha+4\beta+2\gamma & \\ z = 3\alpha-\beta+\gamma & \end{cases} \quad \begin{matrix} 6 & 3 \\ -1 & \\ & 1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha+\beta+\gamma \\ 6x-y = 2\beta+4\gamma \\ 3x+z = 2\beta+4\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6x-y = 3x+z \Leftrightarrow \boxed{3x-y-z=0}$$

<u>Exercice 7</u> : $\boxed{E=\mathbb{R}^3}$

$f : E \to E$ tq $f \neq 0$ et $f\circ f = 0$

1) On remarque que si $u\in \mathrm{Im}(f)$, $\exists v\in E$ tq

$u=f(v) \Rightarrow f(u) = f(f(v)) = 0 \Rightarrow u\in \mathrm{Ker}(f)$

Ainsi $\mathrm{Im}(f)\subset \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$

OR $f\neq 0$ donc $\mathrm{Im}(f)\neq\{0\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f))\geq 1$

ET par le théorème du rang,

$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$

Nécessairement, on a donc $\dim(\mathrm{Im}(f))=1$
et $\dim(\mathrm{Ker}(f))=2$

2) Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) < \dim(E)$, on peut trouver $w \in E$ tel que $w \notin \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, en posant $u = f(w)$, on a $u \neq 0$ et $u \in \mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, on a $\{u\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\{u\}$ libre. Par le théorème de la base incomplète, on peut trouver $v \in \mathrm{Ker}(f)$ tq $\{u, v\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Montrons que $\{u, v, w\}$ forme une base de E.

Comme il y a 3 vecteurs, il suffit de prouver que $\{u, v, w\}$ est libre. OR

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

$$\Rightarrow f(\alpha u + \beta v + \gamma w) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha f(u) + \beta f(v) + \gamma f(w) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma u = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ car } u \neq 0.$$

On a donc $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha u + \beta v = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

OR $\{u, v\}$ est libre donc $\alpha u + \beta v = 0$ $\Rightarrow \alpha = \beta = 0$ ce qui prouve que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc $\{u, v, w\}$ forme une base.

Il suffit alors de noter que

$$f(u) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(u,v,w)}, \quad f(v) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(u,v,w)} \text{ et}$$

$$f(w) = u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(u,v,w)}$$ pour prouver

que la matrice de f dans la base (u, v, w) s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 :

$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$e_1' = e_2 + e_3$ $\qquad f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$

$e_2' = e_3 + e_1$ $\qquad f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$

$e_3' = e_1 + e_2$

1) • $\det((e_1', e_2', e_3')) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) + 1 = 2 \neq 0$

donc (e_1', e_2', e_3') est libre et donc forme une base de $\mathbb{R}^3$ (car 3 vecteurs)

• $\det((f_1', f_2')) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$

(SUITE APRÈS EXERCICE 9 DÉSOLÉ)

Exercice 9 Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ tel que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a

$$AB e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$$

De même $AB e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$.

Ainsi $BAB e_2 = B e_2$ et $BAB e_3 = B e_3$.

• Soit $u_1 = B e_2$ et $u_2 = B e_3$. Montrons que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Pour se faire, il suffit de montrer qu'elle est libre (car 2 vecteurs)

$$\alpha B e_2 + \beta B e_3 = 0$$

$$\Rightarrow A(\alpha B e_2 + \beta B e_3) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha AB e_2 + \beta AB e_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha e_2 + \beta e_3 = 0$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$ car $\{e_2, e_3\}$ est libre.

• Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $x = a u_1 + b u_2$

ce qui implique que $\forall x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} BAx &= BA(aBe_2 + bBe_3) \\ &= a\,BABe_2 + b\,BABe_3 \\ &= a\,Be_2 + b\,Be_3 = x \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $BAx = x$ donc BA est l'identité

$$\Rightarrow BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 8 (suite) :</u>

donc (f_1', f_2') forme une base par le même argument.

2) $u(e_1') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -f_1' + f_2'$

$u(e_2') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3f_1' + 3f_2'$

$u(e_3') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha/2 + \beta/2 = 1 \\ \alpha/2 - \beta/2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 10 + \beta & (1) \\ 10 + 2\beta = 2 & (2) \end{cases}$$

(2) : $\beta = -4$, (1) : $\alpha = 6$ $\Rightarrow u(e_3') = 6f_1' - 4f_2'$

DONC la matrice de u dans ces bases est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$