Exercice 1 : $E = \mathbb{R}^4$

$u = (1,2,1,2)$, $v = (1,-1,2,0)$

1) $w = (x,1,1,y) \in \text{Vect}(u,v) \Leftrightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tq

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - \beta \\ 1 = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha - 1 \\ 1 = \alpha + 4\alpha - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3/5 \\ \beta = 1/5 \end{cases}$$

Ainsi $x = 4/5$ et $y = 6/5$

2) $w = (x,1,y,1) \in \text{Vect}(u,v) \Leftrightarrow \exists (\alpha,\beta \in \mathbb{R}^2$ tq

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - \beta \\ y = \alpha + 2\beta \\ 1 = 2\alpha . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $x = 1/2$ et $y = 1/2$

Exercice 2 : $E = \mathbb{R}_2[X]$

$p_0 : x \longmapsto (x-1)$, $p_1 : x \longmapsto (x-1)^2$

- $p \in \text{Vect}(p_0, p_1) \Rightarrow p(x) = \alpha(x-1) + \beta(x-1)^2$

$$\Rightarrow p(1) = \alpha 0 + \beta 0^2 = 0 .$$

- Si $p(1) = 0$ alors $\exists q \in \mathbb{R}_1[x]$ tq

$$p(x) = (x-1)q(x) = (x-1)(ax+b) = (x-1)(a(x-1) + (a+b))$$
$$= a(x-1)^2 + (a+b)(x-1) = a\, p_1(x) + (a+b)\, p_0(x)$$

et donc $p \in \text{Vect}(p_0, p_1)$.

__Exercice 3__ : $E = \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ \cancel{-y-z=0} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \{(-y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

2) $u \in \mathrm{Ker}(A) \iff u = (-y, y, -y) = y(-1, 1, 1) \iff u \in \mathrm{Vect}((-1,1,-1))$.

__Exercice 4__ : $E = \mathbb{R}^4$

$u = (1,2,1,2)$, $v = (2,0,1,2)$, $w = (0,0,1,1)$

$(x, y, z, t) \in \mathrm{Vect}(\{u, v, w\}) \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha + \beta + \gamma \\ t = 2\alpha + 2\beta + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = y/2 \\ x = y/2 + 2\beta \\ z = y/2 + \beta + \gamma \\ t = y + 2\beta + \gamma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = y/2 \\ \beta = x/2 - y/4 \\ z = y/2 + x/2 - y/4 + \gamma = x/2 + y/4 + \gamma \\ t = y + x - y/2 + \gamma = x + y/2 + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = y/2 \\ \beta = x/2 - y/4 \\ \gamma = z - x/2 - y/4 \\ t = x + y/2 + z - x/2 - y/4 \\ \quad = x/2 + y/4 + z \end{cases}$$

$\iff \boxed{2x + y + 4z - 4t = 0}$

Exercice 5 : $EV = \mathbb{R}^3$

$E = \text{Vect}((2,3,-1),(1,-1,-2))$

$F = \text{Vect}((3,7,0),(5,0,-7))$

- $E \subset F \Leftrightarrow (2,3,-1) \in F$ et $(1,-1,-2) \in F$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3\alpha + 5\beta \\ 3 = 7\alpha \\ -1 = -7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3/7 \\ \beta = 1/7 \\ 3 \times 3/7 + 5 \times 1/7 = 9+5/7 = 2 \end{cases}$ OK

et

$\begin{cases} 1 = 3\alpha + 5\beta \\ -1 = 7\alpha \\ -2 = -7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/7 \\ \beta = 2/7 \\ 3 \times (-1/7) + 5 \times 2/7 = \frac{10-3}{7} = 1 \end{cases}$ OK

DONC $E \subset F$

- $F \subset E \Leftrightarrow (3,7,0) \in E$ et $(5,0,-7) \in E$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2\alpha + \beta \\ 7 = 3\alpha - \beta \\ 0 = -\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ 3 = -3\beta \\ 7 = -7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$ OK

et

$\begin{cases} 5 = 2\alpha + \beta \\ 0 = 3\alpha - \beta \\ -7 = -\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ 5 = 5\alpha \\ -7 = -7\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$ OK

DONC $F \subset E$

Ccl : $E = F$

Exercice 6 : EV = $\mathbb{R}^3$.

$u = (2,1,4)$, $v = (1,-1,2)$, $w = (3,3,6)$

1) $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ \cancel{4\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha + 3\gamma \\ 3\alpha + 6\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha + 3\gamma \\ \alpha = -2\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

Ainsi $\{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha u + \beta v + \gamma w = 0\}$

$= \{(-2\gamma, \gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$

2) On remarque que $y = A\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow y = \alpha u + \beta v + \gamma w$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{(-2\gamma, \gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$

Exercice 7 : $E = C(\mathbb{R})$

$f_0 : x \longmapsto 1$

$f_1 : x \longmapsto \cos(x)$

$f_2 : x \longmapsto \cos(2x)$

$f_3 : x \longmapsto \cos(x)^2$

(LA CORRECTION FAITE EN CLASSE EST MIEUX)

1) Supposons que (f_0, f_1, f_2) n'est pas libre, alors

$\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \{(0,0,0)\}$ tq

$\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha + \beta \cos(x) + \gamma \cos(2x) = 0$

Supposons que $\gamma \neq 0$ alors $\cos(2x) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\cos(x)$

OR $\cos(2x)$ est de période π

Tandis que $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\cos(x)$ est de période 2π

donc impossible et donc $\gamma = 0$.

MAIS dans ce cas on a $\alpha + \beta\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \beta\cos(x) = -\alpha$.

ce qui est impossible si $\beta \neq 0$

ccl : $\gamma = 0$ donc $\beta = 0$ et donc $\alpha = 0$, ce qui est impossible. On conclut que $\{f_0, f_1, f_2\}$ est libre.

2) $\cos(x)^2 = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ donc $f_3 = \dfrac{f_0 + f_2}{2}$

donc $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ n'est pas libre.

Exercice 8 : $E = \mathbb{R}_3[x]$.

$p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x-1$, $p_2(x) = (x-1)(x-2)$, $p_3(x) = (x-1)^2(x-2)$

1) $\alpha p_2 + \beta p_1 + \gamma p_0 = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ \alpha p_2(x) + \beta p_1(x) + \gamma p_0(x) = 0$

$\Leftrightarrow \gamma + \beta x - \beta + \alpha(x^2 - 3x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (2\alpha - \beta + \gamma) + (-3\alpha + \beta)x + \alpha x^2 = 0$

OR un polynome est nul $\Leftrightarrow$ tout ses coefficients sont nuls

donc $\begin{cases} \alpha = 0 \\ -3\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

donc $\{p_0, p_1, p_2\}$ est libre.

2) De même $\forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha p_3(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_1(x) + \delta = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x-2)\alpha + \beta x^2 - 3\beta x + 2\beta + \gamma x - \gamma + \delta = 0$

$\Leftrightarrow \alpha x^3 + (-4\alpha + \beta)x^2 + (5\alpha - 3\beta + \gamma)x + (-2\alpha + 2\beta - \gamma + \delta) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -4\alpha + \beta = 0 \\ 5\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + 2\beta - \gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

donc $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est aussi libre

Exercice 9 : $E = C(\mathbb{R})$

- Soit $\mathcal{F}_n = \{f_k\}_{k\in[0,n]}$ où $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \longmapsto e^{kx}$.

- Soit $(\alpha_k)_{k\in[0,n]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k(x)$.

- Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

alors $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{kx} = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (e^x)^k = 0$

et donc le polynôme $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ admet pour racine $\{e^x\}_{x\in\mathbb{R}}$

- il a donc une infinité de racines et est donc égale au polynome nule et donc

$\forall k \in [1, n]$, $\alpha_k = 0$

ce qui prouve que $\mathcal{F}_n$ est libre.

Exercice 10 :

1) $\mathcal{F} = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

1) $\alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta \\ -\beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \gamma = \beta \\ 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ donc $\mathcal{F}$ est libre.

2) On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ 1 - \beta + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \gamma = \beta \\ 2\gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1/2 \\ \beta = 1/2 \\ \alpha = 1/2 \end{cases}$$

ccl : $(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}_e}$

Exercice 11 :

- Soit $\mathcal{F}e_\lambda = \{(1, 0, \lambda), (1, 1, \lambda), (\lambda, 0, 1)\}$

- Comme $\mathrm{card}(\mathcal{F}e_\lambda) = 3$, il suffit que $\mathcal{F}e_\lambda$ soit libre pour qu'elle soit une base

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma\lambda = 0 \\ \beta = 0 \\ \lambda\alpha + \lambda\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma\lambda = 0 & \times(-\lambda) \\ \lambda\alpha + \gamma = 0 & \boxed{1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma\lambda = 0 \\ (1 - \lambda^2)\gamma = 0 \end{cases} \rightarrow$$

- si $1 - \lambda^2 \neq 0$ alors $\gamma = \alpha = \beta = 0$ et donc la famille est libre.
- si $1 - \lambda^2 = 0$ alors $\gamma \in \mathbb{R}$ donc $\alpha = -\gamma\lambda$ et $\beta = 0$ et $\mathcal{F}e_\lambda$ n'est pas libre.

ccl : $\mathcal{F}e_\lambda$ est une base si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$.

Exercice 12 : EV = $\mathbb{R}^3$.

1) $\{(1,1,0)\}$.

2) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)\}$.

Exercice 13 :

$$E_a = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x), f_0 = a \}$$

1) • E est non vide car $ae^x = a \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ vérifie $(ae^x)' = ae^x$ et $ae^0 = a$.

• Si $a \neq 0$ alors $ae^x \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E_a$ avec $a \neq 0$. On a

$$\left(\frac{f(x)}{ae^x}\right)' = \frac{f'(x)ae^x - ae^x f(x)}{(ae^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{ae^x} = 0$$

donc $\frac{f(x)}{ae^x} = b \in \mathbb{R}$ OR $f(0) = a \Rightarrow b = 1$

et donc $\boxed{f(x) = ae^x}$

ccl : si $a \neq 0$ alors $E_a = \{ae^x\}$

Si $a=0$ alors on suppose que $\exists f \in E_0$ tq $f \neq 0$

$\rightarrow$ Alors $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq $f(x_0) \neq 0$.

$\rightarrow$ Soit $g : x \longmapsto f(x_0+x)$.

g vérifie $g(0) = f(x_0) \neq 0$ et $g' = g$

DONC $g \in E_{f(x_0)} \Rightarrow g(x) = f(x_0)e^{x}$

$\Rightarrow f(x) = g(x-x_0) = f(x_0)e^{x-x_0}$

MAIS dans ce cas $f(0) = \dfrac{f(x_0)}{e^{x_0}} \neq 0$

$\rightarrow$ Par l'absurde, $E_0 = \{0\} = \{0e^{x}\}$

ccl : $E_a = \{ae^{x}\}$ $(\forall a \in \mathbb{R})$

2) $E = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} E_a = \{ae^{x} \mid a \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow$ On vérifie bien que E est un EV

en tant que SEV des fonctions réels et

que $\{e^{x}\}$ est une base de E $\Rightarrow$ $\underline{\dim(E) = 1}$

<u>Exercice 14 :</u>

Soit $f_1 : x \longmapsto x + \sqrt{1-x}$

$f_2 : x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f_4 : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

• Montrons que cette famille est libre

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tq $\forall x \in]-1, 1[$

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) + \delta f_4(x) = 0.$$

$$\alpha\left(x + \sqrt{1-x}\right) + \beta \frac{1+x}{1-x} + \gamma \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \delta \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Méthode 1 : Prendre des valeurs particulières de x pour obtenir un système puis prouver qu'alors $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ (le plus souvent c'est ce qu'il faut faire mais là c'est chiant)

Méthode 2 : Faire un peu pareil mais être ⊕ malin !

1) $x = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma = 0}$

2) $x \to 1$: $(\alpha$

$$\alpha\left(x + \sqrt{1-x}\right) + \beta \frac{1+x}{1-x} + \gamma \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \delta \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1+x}{1-x} \underbrace{\left(\alpha \frac{(1-x)(x+\sqrt{1-x})}{1+x} + \beta + \gamma \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} + \delta \frac{x(1-x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} \right)}_{= \boxed{g(x)}}$$

OR $\dfrac{(1-x)(x+\sqrt{1-x})}{1+x} \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

$$\frac{1-x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{\sqrt{1-x}}{(1+x)\sqrt{1+x}} \xrightarrow[x \to 1]{} 0$$

$$\frac{x(1-x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\sqrt{1-x}}{(1+x)\sqrt{1+x}} \xrightarrow[x \to 1]{} 0$$

DONC $g(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \beta$

DONC si $\beta \neq 0$, $\frac{1+x}{1-x} g(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \pm\infty$ ce qui est impossible car par hypothèse $\frac{1+x}{1-x} g(x) = 0$.

DONC $\boxed{\beta = 0}$

3) comme $\beta = 0$, on a.

$$\alpha(x+\sqrt{1-x^2}) + \gamma \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \delta \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\alpha (x+\sqrt{1-x^2}) \sqrt{1-x^2} + \gamma + \delta x \right) = 0.$$

OR $(x+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2} \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

DONC $\alpha(x+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2} + \gamma + \delta x \xrightarrow[x \to 1]{} \gamma + \delta$

De la même manière, il faut nécessairement que $\boxed{\gamma + \delta = 0}$

4) En reprenant les calculs précédents mais en faisant tendre x vers -1, on a.

$$\alpha(x+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2} + \gamma + \delta x \xrightarrow[x \to -1]{} \gamma - \delta.$$

ET donc $\boxed{\gamma - \delta = 0}$

Il vient que $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \\ \gamma - \delta = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \beta = \gamma = \delta = \alpha = 0.$

donc $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est libre.

Exercice 15 :

$E = \mathbb{C}_{n-1}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i \;\middle|\; (\lambda_i)_{i \in [\![0, n-1]\!]} \in \mathbb{C}^n \right\}$

Soit $(\alpha_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{C}^n$ tous distincts

Soit $L_k(X) = \dfrac{\prod_{i=1, i \neq k}^{n} (X - \alpha_i)}{\prod_{i=1, i\neq k}^{n} (\alpha_k - \alpha_i)} = \dfrac{(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_{k-1})(X-\alpha_{k+1})\cdots(X-\alpha_n)}{(\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k-\alpha_n)}$

---

remarque : les L_k s'appellent les polynômes interpolateurs de Lagrange

---

On souhaite prouver que $\{L_k\}_{k \in [\![1,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

→ On a n vecteurs dans un espace de dimension n. Donc il suffit de prouver que $\{L_k\}_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre pour prouver que c'est une base.

Soit $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ tq $\forall x \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0$

Méthode 1 : Développer et résoudre le système (bonne chance !)

Méthode 2 : Être + malin !

On remarque que $\forall (k, l) \in [\![1,n]\!]^2$

$L_k(\alpha_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(\alpha_k) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 + \dots + \lambda_k \times 1 + \dots + \lambda_n \times 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda_k = 0$

DONC la famille est libre.

Exercice 16

$E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$A = \{u \in E \mid \exists r \in \mathbb{C}, u_{n+1} = u_n + r\}$.

$u \in A \Leftrightarrow u_n = u_0 + nr$.

Soit $e_0 = (1, 1, 1, \dots)$
$e_1 = (1, 2, 3, \dots)$

il est clair que $\{e_0, e_1\}$ forme une famille libre donc $\dim(\mathrm{Vect}(e_0, e_1)) = 2$

On voit que $\forall u \in A$, $u = u_0 e_0 + r e_1$

DONC $A \subset \mathrm{Vect}(e_0, e_1)$

et $\forall u \in \mathrm{Vect}(e_0, e_1)$, $u = a e_0 + b e_1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{n+1} - u_n &= (a(e_0)_{n+1} + b(e_1)_{n+1}) - (a(e_0)_n + b(e_1)_{n+1}) \\ &= (a + b(n+1)) - (a + bn) \\ &= b \end{aligned}$$

$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + b$ et donc $u \in A$ cl: $A = \mathrm{Vect}(e_0, e_1)$
$\Rightarrow \dim(A) = 2$.