

TD 5 : Sous-espaces vectoriels et déterminants

Décomposition de \mathbb{R}^n

Exercice 1 :

1. Montrer que la famille suivante est une base de \mathbb{C}^3

$$\mathbf{e}_1 = (1, -1, i), \quad \mathbf{e}_2 = (-1, i, 1), \quad \mathbf{e}_3 = (i, 1, -1).$$

2. Calculer les coordonnées du vecteur $\mathbf{x} = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par

$$(1, a, 2, -1), \quad (-2, 3, a, 1), \quad (-1, 0, 2, 1), \quad (2, -1, a, 1).$$

- Pour quelles valeurs de a a-t-on égalité $E = \mathbb{R}^4$?
- On suppose que $a = -2$. Déterminer une base de E et trouver une équation linéaire qui caractérise les coordonnées (dans la base canonique) des éléments de E parmi les vecteurs de \mathbb{R}^4 .

Calculs de déterminants

Exercice 3 :

Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2i \\ (1-i) & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ i & -1 & -i \\ 1 & 2 & (1+i) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3i & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 3e^{-\pi/3} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 :

Calculer les déterminants des matrices suivantes, éventuellement en fonction des paramètres recensés.

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :

Calculer les déterminants suivants, éventuellement en fonction des paramètres recensés.

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ d & c & b & a+x \end{vmatrix}, \quad (a, b, c, d, x) \in \mathbb{R}^5.$$

Déterminants - théorie

Exercice 6 :

On considère $\mathbb{R}_3[x]$ muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$. Soit $\mathcal{P} = (p_i)_{i=1,2,3,4}$ telle que $\deg(p_i) = i - 1$ et le coefficient dominant de p_i est 1.

1. Calculer $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{P})$.
2. En déduire que \mathcal{P} est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercice 7 :

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$M_{\lambda} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{3}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} - \lambda \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\chi(\lambda) = \det(M_{\lambda})$ s'annule pour exactement deux valeurs λ_0 et λ_1 que l'on précisera.
2. En déduire que $E_0 = \text{Ker}(M_{\lambda_0})$ et $E_1 = \text{Ker}(M_{\lambda_1})$ ne sont pas triviaux.
3. Montrer que $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$.

Exercice 8 :

Dans les cas suivants, déterminer si les sous-espaces F et G sont en somme directe.

1. Dans \mathbb{R}^2 , $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$, $G = \{(t, 2t), t \in \mathbb{R}\}$,
2. Dans \mathbb{R}^3 , $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$, $G = \{(t, -t, t), t \in \mathbb{R}\}$,
3. Dans \mathbb{R}^3 , $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = x + 2y = 0\}$, $G = \{(t, -t, t), t \in \mathbb{R}\}$,
4. Dans \mathbb{R}^3 , $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = x + 2y = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$,
5. Dans \mathbb{R}^4 , $F = \{(t, s, 0, 0), (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$, $G = \{(s, 0, 0, t), (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 9 :

Calculer les déterminants suivants en fonction de la taille $n \geq 2$ du déterminant et éventuellement en fonction des autres paramètres recensés.

$$a_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & x & y \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad b_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$c_n = \begin{vmatrix} t & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & t & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & t \end{vmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10 :

Déterminer si la matrice suivante est inversible, auquel cas, calculer son inverse :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$