HAP608P « Programmation pour la physique », Université de Montpellier, 2023

Examen de session 2

Durée 2h. Documents fournis sur le site du cours autorisés. Autres documents et accès à internet interdits. La barème est à titre indicatif et peut encore changer. Il faut que vos programmes soient **exécutables** par la commande `python3 nomdufichier.py` et qu'ils **affichent leurs résultats**. Notamment, il ne sera pas accepté que les résultats ne soient accessibles que par le débogueur de votre environnement de développement.

Exercice 1. Programmation élémentaire, graphisme (7 points)

On définit la fonction $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ par

$$\sigma(n) = \sum_{c|n} c\,,$$

où la notation $c|n$ signifie que la somme s'étend sur tous les diviseurs c de n (par exemple, $\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12$).

Réalisez une fonction `sigma(n)` qui calcule $\sigma(n)$. Tracez ses valeurs pour n compris entre 1 et 100.

Exercice 2. Calcul matriciel et algèbre linéaire (7 points)

Étant donné une matrice carrée, réelle et symétrique A, on cherche un de ses vecteurs propres et la valeur propre associée. On propose la méthode suivante :

— Démarrer avec un vecteur unitaire $\vec{v}_0$ au choix, par exemple $\vec{v}_0 = (1, 0, 0, \dots 0)$.

— Définir la suite de vecteurs unitaires $\vec{v}_k$ par récurrence :

$$\vec{v}_{k+1} = \frac{A\vec{v}_k}{||A\vec{v}_k||}$$

— Dans la limite $k \to \infty$, cette suite convergera (sous certaines conditions) vers un des vecteurs propres $\vec{v}$ de A. Pour obtenir une bonne approximation à $\vec{v}$, il suffit de calculer $\vec{v}_{k_{\max}}$ avec $k_{\max}$ suffisamment grand. La valeur propre λ est enfin donnée par $\lambda = \vec{v}^{\,\mathrm{T}} A\vec{v}$.

1. Réalisez une fonction `vpropre(A, kmax=50)` qui renvoie un vecteur propre de A et sa valeur propre, calculés avec cette méthode.
2. Utilisez votre fonction dans un programme afin de trouver un des vecteurs propres et sa valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 0.5 \\ 3 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$. Ensuite, votre programme vérifiera le résultat : faites afficher $A\vec{v} - \lambda\vec{v}$. Le résultat devrait être $\vec{0}$ à une petite erreur numérique près.

Exercice 3. Fichiers, régression linéaire (6 points)

Pour décrire le rendement Y d'une réaction chimique en fonction de la temperature T et de la pression P, on propose le modèle linéaire

$$Y(T, P) = \beta_0 + \beta_T\, T + \beta_P\, P\,.$$

Le fichier `rendement.txt` (téléchargeable de Moodle) contient les données mesurées de Y (première colonne) pour différentes valeurs de T et P (deuxième et troisième colonne) en unités arbitraires. Trouvez les valeurs optimales des paramètres β_0, β_P et β_T par une régression linéaire. (Pour rappel, les paramètres $\vec{\beta}$ du meilleur ajustement pour $A\vec{\beta} \approx \vec{y}$ sont donnés par la solution du système linéaire $A^{\mathrm{T}}A\vec{\beta} = A^{\mathrm{T}}\vec{y}$; quelle forme doit avoir A ici ?)