

Calculabilité avancée

Université de Montpellier

Examen

7 mai 2021

Durée 2h

Aucun document n'est autorisé

Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable,
appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin!

Le symbole $\prec$ représente la réduction Turing entre ensembles d'entiers

Exercice 1 Low

On qualifie un ensemble de *low* si il n'est pas récursif et si son jump est $0'$. On rappelle que le jump d'un ensemble A est le degré Turing du problème de l'arrêt avec oracle A (ensemble qu'on notera $\mathbb{K}^A$).

Une seule des deux questions suivantes est à traiter (au choix), la seconde est plus difficile et rapporte plus de points que la première. Traiter les deux apporte un bonus mais n'apporte pas la somme des points – il convient de traiter aussi les autres questions.

Indications : il s'agit d'adapter deux constructions du cours en insérant en leur sein des contraintes supplémentaires sur les ensembles qu'on construit. Pour que A soit low, pour tout programme p , lorsqu'on observe une convergence de $[p|p]^{A'}$ (où A' représente l'approximation de A en cours de construction), alors on "fixe" les éléments de l'oracle nécessaires à ce calcul convergent.

1. Montrez qu'il existe deux ensembles A et B $0'$ -calculables et low tels que $A \not\prec B$ et $B \not\prec A$.
2. Montrez qu'il existe deux ensembles A et B énumérables et low tels que $A \not\prec B$ et $B \not\prec A$.

Exercice 2 cours

1. Montrez que la classe P est strictement incluse dans EXP . Soit vous donnez une preuve directe, soit vous utilisez un théorème du cours, mais dans ce cas il vous est demandé de le prouver.
2. Nous travaillons ici dans une théorie logique T qui contient l'arithmétique de Peano. Montrez que $\{y, \exists x T \vdash K(x) > y\}$ est un ensemble fini.