

Correction de la partie ordres et treillis

1 Partie sur les ordres et les treillis (1h)

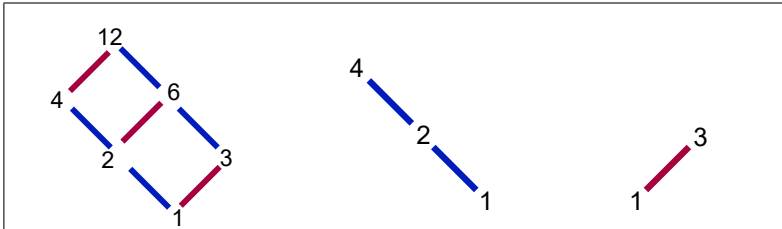


FIGURE 1 – Partie gauche : diagramme de Hasse de l'ordre partiel de divisibilité sur les diviseurs du nombre 12 (D_{12}). Partie centrale : diagramme de Hasse de l'ordre de divisibilité sur les diviseurs de 4 (D_4). Partie droite : diagramme de Hasse de l'ordre de divisibilité sur les diviseurs de 3 (D_3).

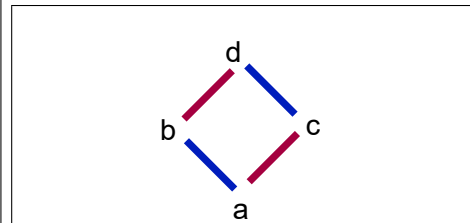


FIGURE 2 – Diagramme de Hasse D_{abcd} d'un ordre partiel sur l'ensemble $\{a,b,c,d\}$.

Le sujet est librement inspiré de <http://pierreaudibert.fr/tra/treillis.pdf>.

Question 1. (1,5 point) Dessinez le graphe de la relation d'ordre dont la partie gauche de la figure 1 (diagramme D_{12}) est le diagramme de Hasse.

Réponse Elle est donnée sur la figure 3.

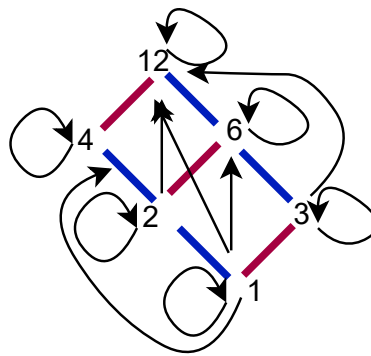


FIGURE 3 – Graphe de l'ordre partiel dont D_{12} est le diagramme de Hasse.

Question 2. (2,5 points) Dessinez le diagramme de Hasse de l'ordre $D_4 \times D_3$, produit direct des ordres dont les diagrammes de Hasse sont D_4 et D_3 . Puis pour chaque couple (x, y) de l'ordre produit, calculez x^*y . Comparez D_{12} à $D_4 \times D_3$.

Réponse Elle est donnée sur la figure 4.

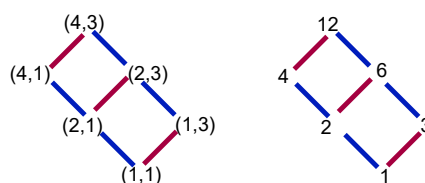


FIGURE 4 – A gauche le diagramme de Hasse du produit direct de $D_4 \times D_3$. A droite, le même ordre avec le produit des composantes de chaque couple, il correspond à D_{12} . Ils sont isomorphes.

Question 3. (2,5 points) Dans D_{12} , soit le sous-ensemble $\{4, 6\}$:

a- Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera $Min(\{4, 6\}) = \{2, 1\}$

b- L'ensemble de minorants $Min(\{4, 6\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s)? **Il est unique, il s'agit de 2**

c- Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera $Maj(\{4, 6\}) = \{12\}$

d- L'ensemble de majorants $Maj(\{4, 6\})$ admet-il un unique plus petit élément (justifiez)? **Il est unique, il s'agit de 12**

e- D_{12} est-il le diagramme de Hasse d'un treillis? Justifiez en indiquant comment la définition de treillis s'applique ou non ici. **D_{12} est bien le diagramme de Hasse d'un treillis : tout sous-ensemble de sommets admet une borne inf et une borne sup. Les cas non triviaux sont pour les sous-ensembles contenant $\{4, 6\}$ ou $\{2, 3\}$. Le raisonnement mené sur $\{4, 6\}$ montre que ces sous-ensembles auront bien une borne inf et une borne sup.**

Question 4. (2,5 points)

a- Définir deux morphismes d'ordre différents m_1 et m_2 dont le domaine (source) soit l'ordre correspondant au diagramme de Hasse D_{abcd} de la figure 2 et le co-domaine (cible) soit l'ordre D_{12} correspondant au diagramme de Hasse de la figure 1 (Partie gauche). Indiquez ensuite comment chacun de ces morphismes projette chaque arc du diagramme de Hasse D_{abcd} vers un arc du diagramme D_{12} .

b- Ces morphismes sont-ils des isomorphismes? Justifiez.

Réponse a et b

m_1 peut correspondre à une projection sur la partie haute : $m_1(a) = 2$, $m_1(b) = 4$, $m_1(c) = 6$, $m_1(d) = 12$. Sur les arcs du diagramme de Hasse :

l'arc (a, b) se projette sur l'arc $(2, 4)$, (a, c) se projette sur l'arc $(2, 5)$, (b, d) se projette sur l'arc $(4, 12)$, (c, d) se projette sur l'arc $(6, 12)$.

m_2 peut correspondre à une projection sur la partie basse : $m_1(a) = 1$, $m_1(b) = 2$, $m_1(c) = 3$, $m_1(d) = 6$. Sur les arcs du diagramme de Hasse :

l'arc (a, b) se projette sur l'arc $(1, 2)$, (a, c) se projette sur l'arc $(1, 3)$, (b, d) se projette sur l'arc $(2, 6)$, (c, d) se projette sur l'arc $(3, 6)$.

Il en existe d'autres, on peut projeter a, b, c, d sur 1, 4, 3, 12 ou faire des projections miroirs.

Ce ne sont pas des isomorphismes car ces morphismes ne peuvent en aucun cas être des bijections, les deux ensembles de sommets étant de taille différente.

Question 5. (1 point) Remarquez que la décomposition de 12 en puissances de nombres premiers est $2^2 * 3$. La décomposition de 84 en puissances de nombres premiers est $2^2 * 3 * 7$. Comment pourriez-vous obtenir le diagramme de Hasse des diviseurs de 84 par produit de D_{12} et d'un autre ordre dont vous donnerez le diagramme de Hasse? Dessinez ensuite ce produit.

Réponse On peut obtenir ce diagramme de Hasse en faisant le produit de D_{12} par l'ordre de diagramme D_7 . Il comporte les deux sommets 1 et 7, 1 divisant 7. Le diagramme de l'ordre produit est montré figure 5.

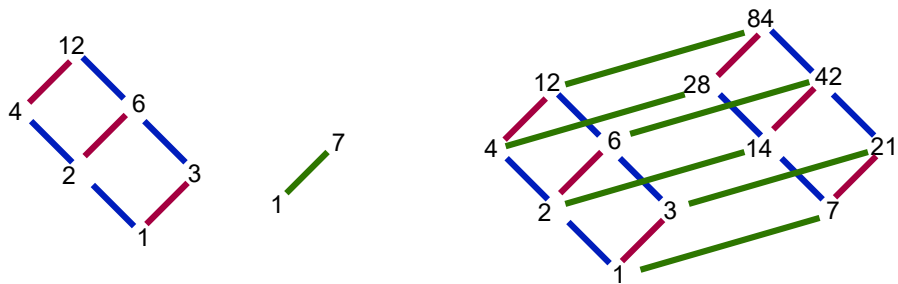


FIGURE 5 – À gauche les diagrammes de Hasse D_{12} et D_7 . À gauche, le diagramme de Hasse D_{84} , obtenu par produit des deux.