

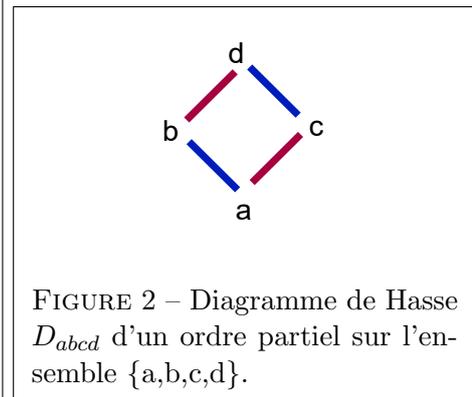
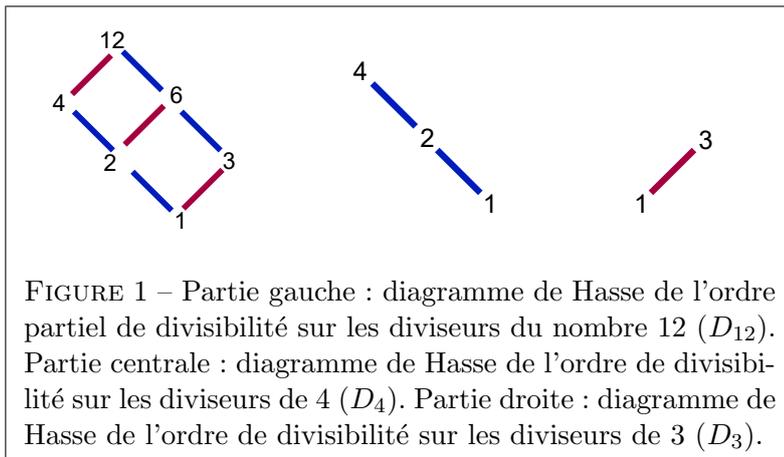
## Ordres, Treillis et Induction

Tous documents sur support papier autorisés. Durée : 2h00

Les deux parties sont indépendantes. Vous devrez rendre les réponses sur 2 copies séparées.

### 1 Partie sur les ordres et les treillis (1h)

*À rendre sur une copie indépendante*



Le sujet est librement inspiré de <http://pierreaudibert.fr/tra/treillis.pdf>.

**Question 1.** (1,5 point) Dessinez le graphe de la relation d'ordre dont la partie gauche de la figure 1 (diagramme  $D_{12}$ ) est le diagramme de Hasse.

**Question 2.** (2,5 points) Dessinez le diagramme de Hasse de l'ordre  $D_4 \times D_3$ , produit direct des ordres dont les diagrammes de Hasse sont  $D_4$  et  $D_3$ . Puis pour chaque couple  $(x, y)$  de l'ordre produit, calculez  $x \cdot y$ . Comparez  $D_{12}$  à  $D_4 \times D_3$ .

**Question 3.** (2,5 points) Dans  $D_{12}$ , soit le sous-ensemble  $\{4, 6\}$  :

a- Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera  $Min(\{4, 6\})$ .

b- L'ensemble de minorants  $Min(\{4, 6\})$  admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?

c- Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera  $Maj(\{4, 6\})$ .

d- L'ensemble de majorants  $Maj(\{4, 6\})$  admet-il un unique plus petit élément (justifiez) ?

e-  $D_{12}$  est-il le diagramme de Hasse d'un treillis ? Justifiez en indiquant comment la définition de treillis s'applique ou non ici.

**Question 4.** (2,5 points)

a- Définir deux morphismes d'ordre différents  $m_1$  et  $m_2$  dont le domaine (source) soit l'ordre correspondant au diagramme de Hasse  $D_{abcd}$  de la figure 2 et le co-domaine (cible) soit l'ordre  $D_{12}$  correspondant au diagramme de Hasse de la figure 1 (Partie gauche). Indiquez ensuite comment chacun de ces morphismes projette chaque arc du diagramme de Hasse  $D_{abcd}$  vers un arc du diagramme  $D_{12}$ .

b- Ces morphismes sont-ils des isomorphismes ? Justifiez.

**Question 5.** (1 point) Remarquez que la décomposition de 12 en puissances de nombres premiers est  $2^2 \cdot 3$ . La décomposition de 84 en puissances de nombres premiers est  $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ . Comment pourriez-vous obtenir le diagramme de Hasse des diviseurs de 84 par produit de  $D_{12}$  et d'un autre ordre dont vous donnerez le diagramme de Hasse ? Dessinez ensuite ce produit.

## 2 Partie sur l'induction (1h)

*À rendre sur une copie indépendante*