

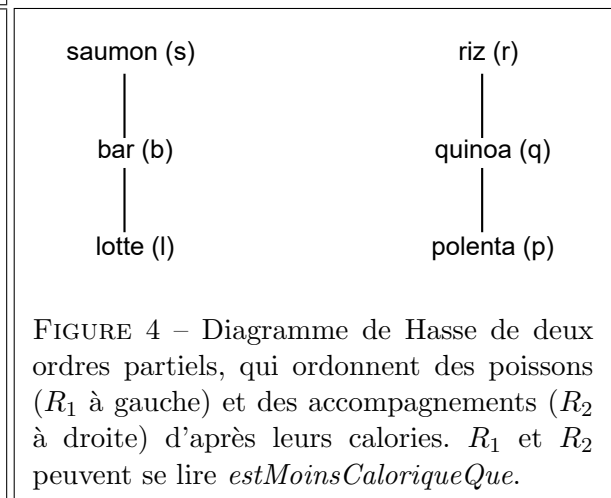
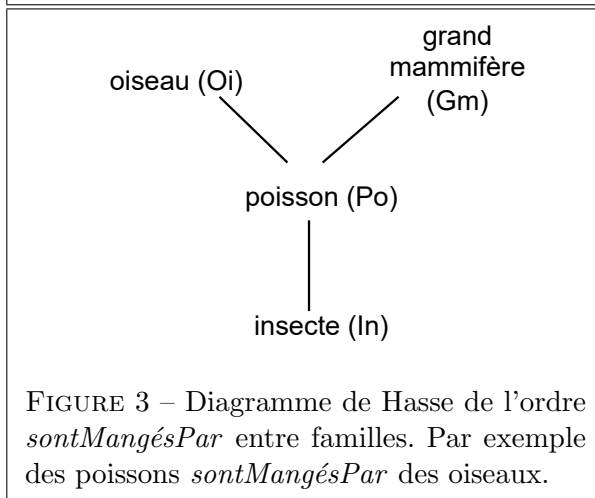
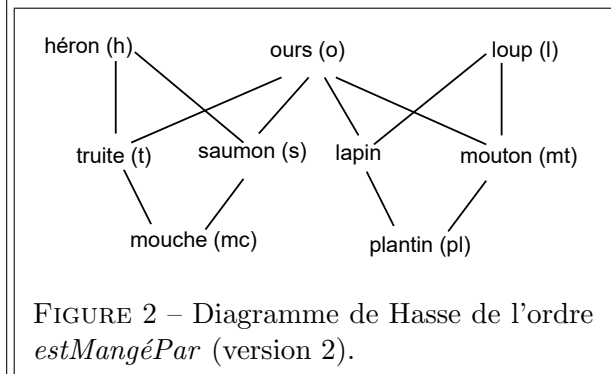
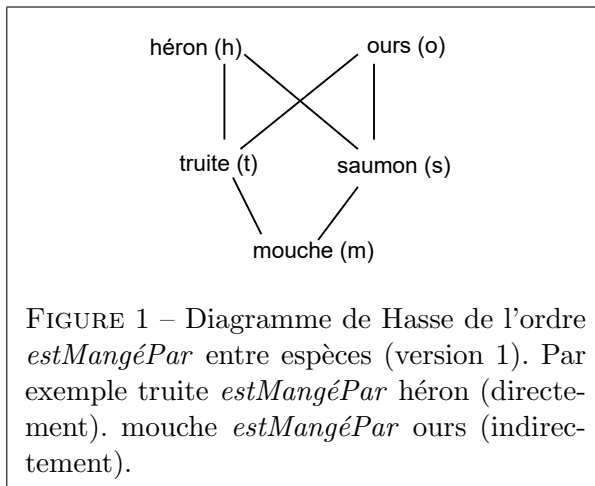
Ordres, Treillis et Induction

Tous documents sur support papier autorisés. Durée : 2h00

Les deux parties sont indépendantes. Vous devrez rendre les réponses sur 2 copies séparées.

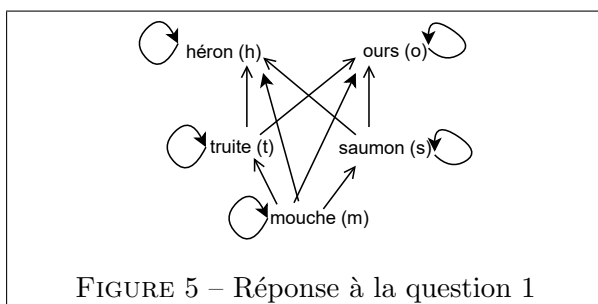
1 Partie sur les ordres et les treillis (1h)

À rendre sur une copie indépendante



Question 1. Dessinez le graphe de la relation d'ordre dont la figure 1 est le diagramme de Hasse.

Réponse. Le graphe de l'ordre est représenté sur la figure 5.



Question 2. Pour le sous-ensemble $\{h, o\}$:

a- Donnez son ensemble de minorants. $Min(\{h, o\}) = \{t, s, m\}$

b- L'ensemble de minorants $Min(\{h, o\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ? **Non, il a 2 plus grands éléments incomparables entre eux** $\{t, s\}$

c- Donnez son ensemble de majorants. $Maj(\{h, o\}) = \emptyset$

d- L'ensemble de majorants $Maj(\{h, o\})$ admet-il un unique plus petit élément (justifiez) ? **Non, puisqu'il est vide.**

Question 3. Pour le sous-ensemble $\{t, s\}$:

a- Donnez son ensemble de minorants. $Min(\{t, s\}) = \{m\}$.

b- L'ensemble de minorants $Min(\{t, s\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ? **Oui, il s'agit de m .**

c- Donnez son ensemble de majorants. $Maj(\{t, s\}) = \{h, o\}$

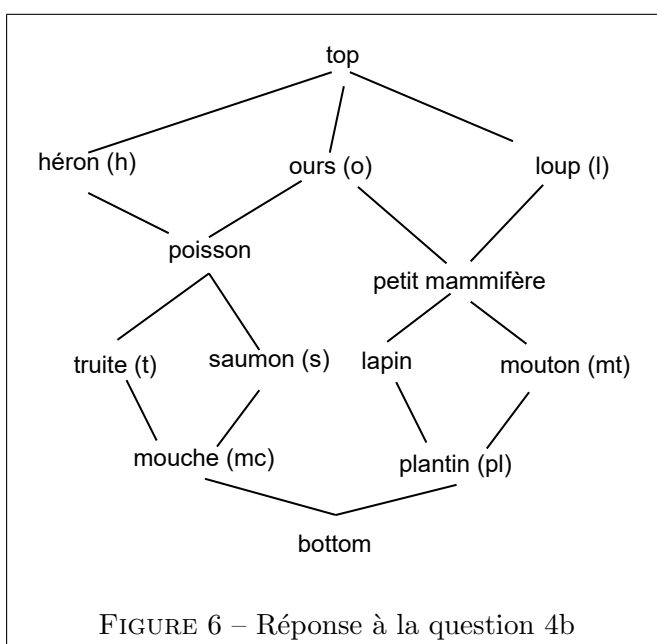
d- L'ensemble de majorants $Maj(\{t, s\})$ admet-il un unique petit élément (justifiez) ? **Non, puisqu'il contient deux sommets incomparables.**

Question 4.

a- Le diagramme de Hasse de la figure 2 correspond à un ordre partiel qui n'est pas un treillis. Indiquez pourquoi avec des exemples de situations présentes dans cet ordre partiel mais interdites dans un treillis.

Quelques exemples de situations : $\{t, s\}$ n'admet pas de borne supérieure (pas de plus petit majorant), $\{h, o\}$ n'admet pas de borne supérieure ni de borne inférieure (pas de plus grand minorant), $\{o, l\}$ n'admet pas de borne supérieure ni de borne inférieure, $\{lapin, m\}$ n'admet pas de borne supérieure, $\{mc, pl\}$ n'admet pas de borne inférieure.

b- Complétez le diagramme de Hasse en ajoutant de nouveaux sommets et de nouvelles relations de manière à ce qu'il devienne le diagramme de Hasse d'un treillis. La relation d'ordre entre les sommets initiaux doit rester inchangée, cependant des arcs du diagramme de Hasse initial, qui seraient devenus des arcs de transitivité peuvent ne plus apparaître graphiquement dans le nouveau diagramme.



Question 5.

a- Définir un morphisme d'ordre dont le domaine (source) soit l'ordre R_1 correspondant au diagramme de Hasse de la figure 1 et le co-domaine (cible) soit l'ordre R_2 correspondant au diagramme de Hasse de la figure 3. Indiquez ensuite comment chaque arc du diagramme de Hasse de R_1 se transforme en un arc du diagramme de Hasse de R_2

Réponse. Un morphisme M peut se définir comme suit :

- $M(h) = Oi$
- $M(o) = Gm$
- $M(t) = M(s) = Po$
- $M(m) = In$

Il transforme les arcs du diagramme de Hasse de cette manière :

- (m, t) et (m, s) en (In, Po)
- (t, h) et (s, h) en (Po, Oi)
- (t, o) et (s, o) en (Po, Gm)

b- Ce morphisme est-il un isomorphisme ? Justifiez.

Réponse. Ce n'est pas un isomorphisme puisque ce n'est pas une bijection.

Question 6.

Soient les deux ordres R_1 et R_2 dont les diagrammes de Hasse sont donnés à la figure 4. Dessinez le diagramme de Hasse du produit direct $R_1 \times R_2$ de ces deux ordres.

