Ordres, Treillis et Induction

Tous documents sur support papier autorisés. Durée : 2h00
Les deux parties sont indépendantes. Vous devrez rendre les réponses sur 2 copies séparées.

1 Partie sur les ordres et les treillis (1h) *À rendre sur une copie indépendante*

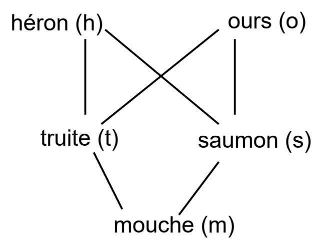

Figure 1 – Diagramme de Hasse de l'ordre *estMangéPar* entre espèces (version 1). Par exemple truite *estMangéPar* héron (directement). mouche *estMangéPar* ours (indirectement).

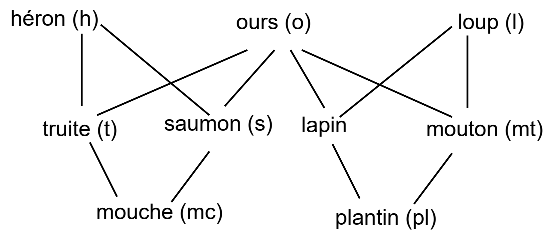

Figure 2 – Diagramme de Hasse de l'ordre *estMangéPar* (version 2).

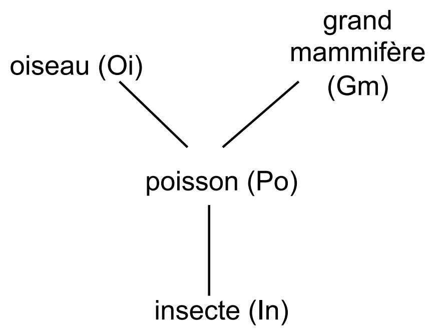

Figure 3 – Diagramme de Hasse de l'ordre *sontMangésPar* entre familles. Par exemple des poissons *sontMangésPar* des oiseaux.

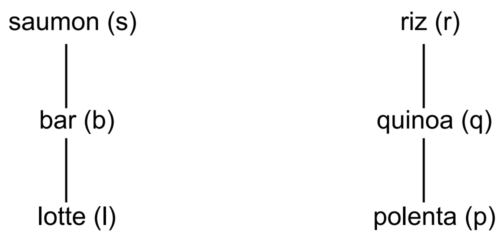

Figure 4 – Diagramme de Hasse de deux ordres partiels, qui ordonnent des poissons (R_1 à gauche) et des accompagnements (R_2 à droite) d'après leurs calories. R_1 et R_2 peuvent se lire *estMoinsCaloriqueQue*.

Question 1. Dessinez le graphe de la relation d'ordre dont la figure 1 est le diagramme de Hasse.

Question 2. Pour le sous-ensemble $\{h, o\}$:
a- Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera $Min(\{h, o\})$.
b- L'ensemble de minorants $Min(\{h, o\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?
c- Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera $Maj(\{h, o\})$.
d- L'ensemble de majorants $Maj(\{h, o\})$ admet-il un unique plus petit élément (justifiez) ?

Question 3. Pour le sous-ensemble $\{t, s\}$:
a- Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera $Min(\{t, s\})$.
b- L'ensemble de minorants $Min(\{t, s\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?
c- Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera $Maj(\{t, s\})$.
d- L'ensemble de majorants $Maj(\{t, s\})$ admet-il un unique petit grand élément (justifiez) ?

Question 4.
a- Le diagramme de Hasse de la figure 2 correspond à un ordre partiel qui n'est pas un treillis. Indiquez pourquoi avec des exemples de situations présentes dans cet ordre partiel mais interdites dans un treillis.
b- Complétez le diagramme de Hasse en ajoutant de nouveaux sommets et de nouvelles relations de manière à ce qu'il devienne le diagramme de Hasse d'un treillis. La relation d'ordre entre les sommets initiaux doit rester inchangée, cependant des arcs du diagramme de Hasse initial, qui seraient devenus des arcs de transitivité peuvent ne plus apparaître graphiquement dans le nouveau diagramme.

Question 5.
a- Définir un morphisme d'ordre dont le domaine (source) soit l'ordre R_1 correspondant au diagramme de Hasse de la figure 1 et le co-domaine (cible) soit l'ordre R_2 correspondant au diagramme de Hasse de la figure 3. Indiquez ensuite comment ce morphisme projette chaque arc du diagramme de Hasse de R_1 vers un arc du diagramme de Hasse de R_2.

b- Ce morphisme est-il un isomorphisme ? Justifiez.

Question 6.
Soient les deux ordres R_1 et R_2 dont les diagrammes de Hasse sont donnés à la figure 4. Dessinez le diagramme de Hasse du produit direct $R_1 \times R_2$ de ces deux ordres.

2 Partie sur l'induction (1h)
À rendre sur une copie indépendante

Exercice 1

On considère le type inductif $\mathcal{N}$ des entiers naturels vu en cours. Dans ce qui suit, on supposera que les opérations arithmétiques sur $\mathcal{N}$ sont connues et ont les propriétés usuelles (commutativité pour l'addition par exemple, etc.).

On introduit également le type $\mathcal{R}$ des nombres réels dont nous ne donnerons pas la définition. On supposera aussi que les opérations arithmétiques sur $\mathcal{R}$ sont connues et ont les propriétés usuelles.

1. Écrire récursivement la fonction f qui à tout $n \in \mathcal{N}$ associe $\sum_{i=0}^{n} i$.
2. Démontrer que $f(n) = \frac{n \times S(n)}{2}$.
3. Étant donné $a > 0 \in \mathcal{R}$, écrire récursivement la fonction g qui à tout $n \in \mathcal{N}$ associe $\sum_{i=0}^{n} a^i$.
4. Démontrer que $g(n) = \frac{a^{S(n)}-1}{a-1}$.

Exercice 2

On considère le type inductif $\mathcal{L}$ des listes (polymorphes) vu en cours.

1. Définir la relation inductive *is_rev*, qui teste si une liste est l'inversion d'une autre liste.
   Exemple : $[1;2;3]$ est une inversion de $[3;2;1]$ (et vice-versa).
2. Démontrer que $[1;2;3]$ est une inversion de $[3;2;1]$.
3. Écrire la fonction *rev*, qui étant donnée une liste l, rend la liste l inversée.
   Exemple : l'évaluation de (*rev* $[1;2;3]$) donne $[3;2;1]$.
4. Énoncer les théorèmes de correction et de complétude de la fonction *rev* vis-à-vis de la relation *is_rev*.
5. Démontrer le théorème de correction de la fonction *rev* vis-à-vis de la relation *is_rev* en utilisant une induction structurelle.