TD Arches romanes et gothiques
Corrigé

1. Détermination des efforts intérieurs

Bilan des efforts extérieurs :

$$\mathcal{T}_B = \begin{Bmatrix} T\vec{x} - P\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{T}_A = \begin{Bmatrix} X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ M_A\vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{R}(s) = N(s)\,\vec{x}_1 + T_2(s)\,\vec{x}_2$$

$$\vec{M}_f(s) = M_f(s)\,\vec{z} = M_f(s)\,\vec{x}_3$$

- Equation d'équilibre en résultante :

$$\frac{d\vec{R}(s)}{ds} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}(s) = \vec{cste}$$

comme $\vec{R}(s = R\alpha) = \vec{R}_B$, $\boxed{\vec{R}(s) = T\vec{x} - P\vec{y}}$

- Equation d'équilibre en moment

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0} \Rightarrow \frac{dM_f}{R\,d\theta} = -\vec{x}_1 \wedge (T\vec{x} - P\vec{y})$$

comme $\vec{x}_1 \wedge \vec{x} = -\cos\theta\,\vec{z}$ et $\vec{x}_1 \wedge \vec{y} = -\sin\theta\,\vec{z}$,

$$\frac{dM_f}{d\theta} = RT\cos\theta - RP\sin\theta$$

En intégrant $M_f(\theta) = RT\sin\theta + RP\cos\theta + C$

Or, en B, $s_B = R\alpha$, $M_f(\alpha) = 0 = RT\sin\alpha + RP\cos\alpha + C$

D'où la valeur de C et l'expression de $M_f(\theta)$,

$$\boxed{M_f(\theta) = RT(\sin\theta - \sin\alpha) + RP(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad M_f(\theta) = RP\cos\theta + RT(\sin\theta - 1)$

2. Relation de comportement en flexion

(question de cours)

$$M_f = EI\gamma = EI\,\frac{d\omega}{ds} \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{M_f}{EI}$$

3. Formules de Bresse

en B

En se limitant au déplacement de la ligne moyenne,

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_A^B \vec{\varepsilon}(s)\,ds + \int_A^B \vec{BG}(s) \wedge \vec{\gamma}(s)\,ds$$

Sous les conditions de l'exercice

- encastrement en A : $\vec{u}_A = \vec{0}$ $\quad \vec{\omega}_A = 0$.
- ne prenant en compte que la flexion : $\vec{\varepsilon} \sim \vec{0}$.

il reste $\vec{u}_B = \int_A^B \vec{BG} \wedge \vec{\gamma}\,ds$

ce qui donne $\vec{u}_B \cdot \vec{x} = \int_0^\alpha (\vec{BG}(\theta) \wedge \vec{\gamma}(\theta)) \cdot \vec{x}\; R\,d\theta$

$$\vec{u}_B \cdot \vec{x} = R\int_0^\alpha (\vec{BG} \wedge \gamma\vec{z}) \cdot \vec{x}\,d\theta = R\int_0^\alpha \gamma\, \vec{BG} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{x})\,d\theta$$

$$= \frac{R}{EI}\int_0^\alpha M_f(\theta)\,\vec{BG} \cdot \vec{y}\,d\theta$$

avec $\vec{BG} = \vec{OG} - \vec{OB} = R(\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y} - \cos\alpha\,\vec{x} - \sin\alpha\,\vec{y})$

d'où $\vec{BG} \cdot \vec{y} = R(\sin\theta - \sin\alpha)$

soit

$$\boxed{\vec{u}_B \cdot \vec{x} = \frac{R^3}{EI}\int_0^\alpha \left[P(\cos\theta - \cos\alpha) + T(\sin\theta - \sin\theta)\right](\sin\theta - \sin\theta)\,d\theta}$$

4. Condition de symétrie en B (sur le déplacement)

La condition de symétrie remplacée par une liaison donne

$\vec{u}_B \cdot \vec{x} = 0$. Soit pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \left[P\cos\theta + T(\sin\theta - 1)\right](\sin\theta - 1)\,d\theta = 0$$

Soit

$$P\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta}_{\frac{1}{2}\underbrace{\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}}_{1}} - P\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta}_{\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} = 1} + T\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta}_{\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta}_{=\pi/4}} - 2T\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta}_{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 1} + T\underbrace{\int_0^{\pi/2}d\theta}_{\pi/2} = 0$$

Soit $\frac{P}{2} - P + T\frac{\pi}{4} - 2T + T\frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{T}{P} = \frac{2}{3\pi - 8}}$

On a $\frac{T}{P} = \frac{2}{3\pi-8} \sim 1.4$ soit un cisaillement à la base de l'arche ($T = \vec{R}_A \cdot \vec{x}$) de l'ordre de 140% de l'effort vertical appliqué en B !

5. Le calcul mené avec SageMath en cours pour α quelconque, donne

$$\boxed{\frac{T}{P} = \frac{1 + 2\cos\alpha - 3\cos^2\alpha - 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha + 2\alpha\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin\alpha}} \left(= \frac{2}{3\pi - 8} \text{ si } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$$