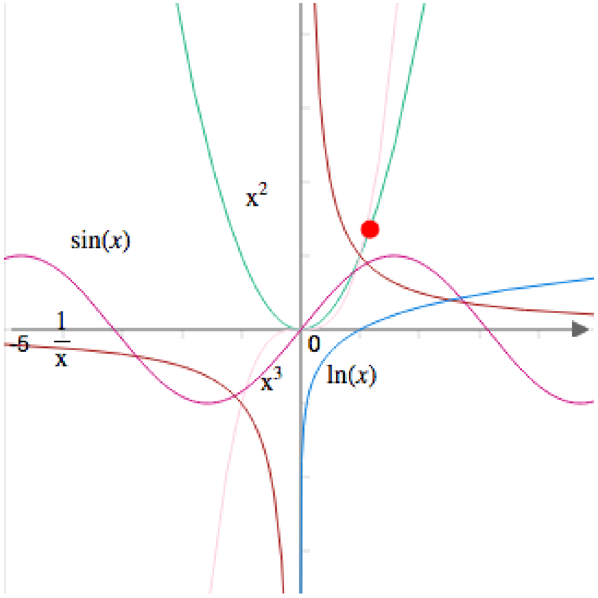
Rappel sur les Fonctions

Le mathématicien Allemand Leibniz introduit en 1673 pour la première fois le terme **fonction**, venant du latin functiones, signifiant « accomplissement », « remplir une charge ».

Il écrit: « J'appelle fonction toutes les portions de lignes qu'on fait en menant des lignes.... »

En 1718, le suisse Jean Bernoulli propose la notation Φx

Le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) propose une 3ème définition puis la notation **f(x)**



I. Rappel sur les Fonctions : *fonction ln*

Définition : la fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique primitive de la fonction

$x \to \frac{1}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Conséquences directes :
ln(1) = 0
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour

$$\text{tout } x>0 \text{ on a } \ln'(x)=\frac{1}{x}$$

Proposition

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$
- $\ln(a^n) = n\ln(a).$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a).$

Le *ln* a la particularité de transformer
- les produits en sommes
- les quotients en différences
- les puissances en multiplications

Exercices : *le ln*

Exprimer en fonction de ln(2) et ln(3) les expressions suivantes

$$A = \ln 8 \quad B = \ln \frac{1}{16} \qquad C = \frac{1}{2}\ln 16 \qquad D = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}$$

Exprimer A et B avec un seul logarithme

$$A = 2\ln 3 + \ln 2 + \ln\frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{2}\ln 9 - 2\ln 3$$

Fonctions

Propriété 2
On a les limites importantes suivantes :

- $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$

Conséquence : La droite x=0 est donc asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ***ln***

Tracer la courbe y=ln(x)

II. Rappel sur les Fonctions : la fonction *exp*

Définition : la fonction exponentielle est la fonction définie sur l'ensemble des réels par

$$\exp(x) = e^x$$

e^x Étant l'unique nombre réel positif dont le logarithme vaut x

Remarque :
On dit que la fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme, ce qui signifie que graphiquement, les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice y=x dans un repère orthonormal.

Conséquences directes :

- $\exp(x) > 0.$
- $\exp(1) = e^1 = e \approx 2,718.$
- $\ln(e^x) = x.$
- $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0.$
- $x \in \mathbb{R}$ et $y = e^x \iff y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(y) = x.$

Rappel sur les Fonctions : la fonction *exp*

Propriétés

Soient a et b deux réels et n est un entier relatif, alors :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$.
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
- $(e^a)^n = e^{an}$.

L'***exp*** a la particularité de transformer

- les sommes en produits
- les différences en quotients
- les multiplications en puissances

Rappel sur les Fonctions : la fonction *exp*

Transformer les expressions suivantes :

$$e^2 \times e^3 \times \frac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3}$$

$$e^{x+3} \times e^{2x+1}$$

$$(e^{x-2})^2$$

correction : la fonction *exp*

Transformations d'expressions numériques et algébriques

- $e^2 \times e^3 \times \dfrac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3} = e^{2+3-4+6} = e^7.$
- $e^{x+3} \times e^{2x+1} = e^{(x+3)+(2x+1)} = e^{3x+4}.$
- $(e^{x-2})^2 = e^{2x-4}.$

la fonction *exp*

Propriété 4
On a les limites importantes suivantes :

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$

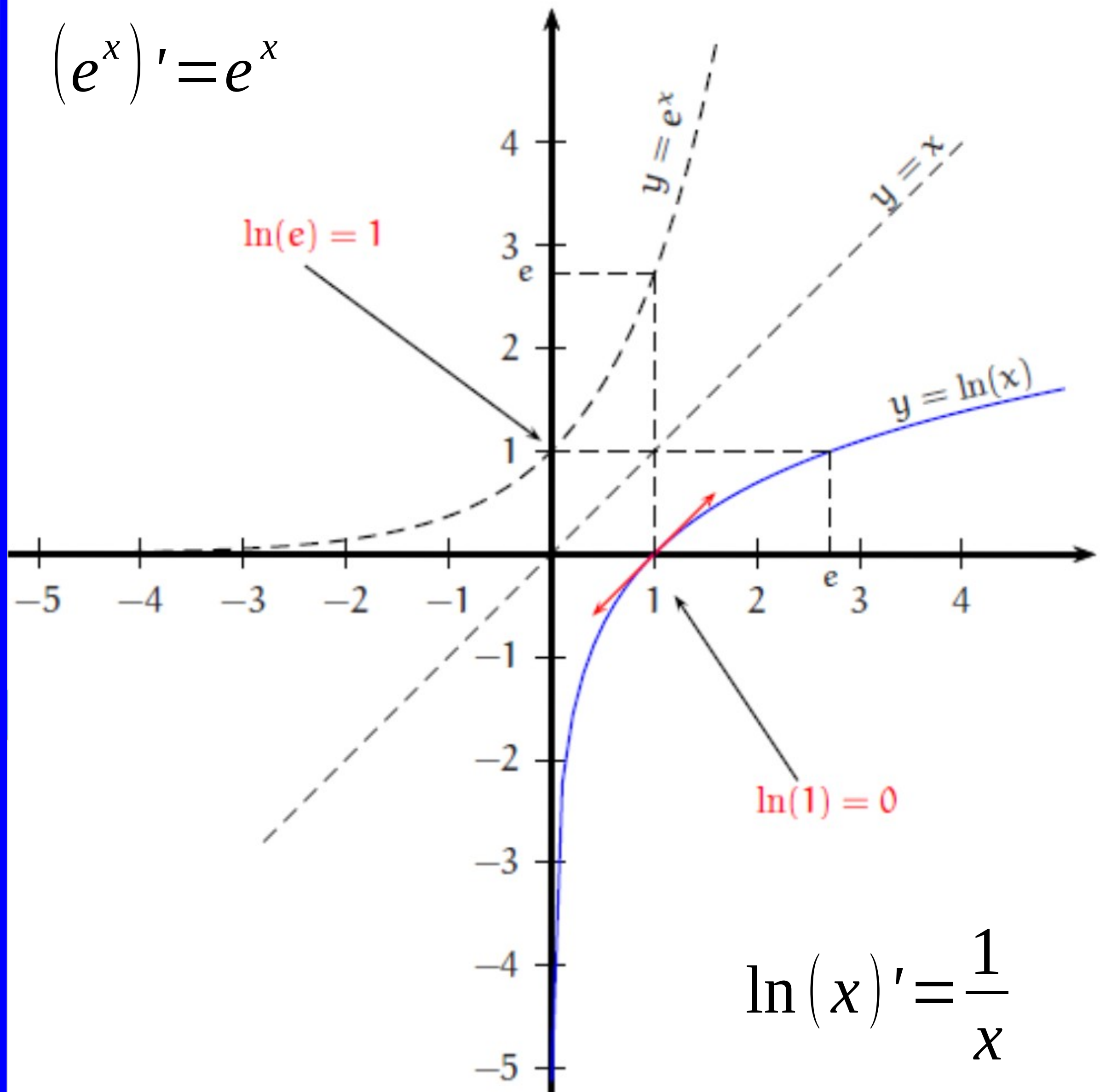
Conséquence : La droite y=0 est donc asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction ***exp***

La fonction exponentielle est dérivable sur l'ensemble des réels, on a :

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

Fonctions *ln / exp*

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$$



$$\ln(x)' = \frac{1}{x}$$

Les limites …. les FI

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad , \quad \infty - \infty$$

Exercices

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - x)$ est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 3} \right)$ est une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

A savoir

De manière générale, le comportement d’une fonction polynomiale en $\pm\infty$

Est dicté par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - x)$ est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} 3x^2 - x = \lim_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 3} \right)$ est une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

A savoir

De manière générale, le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$

Est dicté par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$

Les limites …. les FI

Exercices

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x}(x^2+1)\right]$ est une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

$\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$ est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{x}(x^2+1)\right]$ est une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\left(x^2+1\right) = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$$

0

$\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$$

La règle de L'Hospital

La règle de L'Hospital permet de lever des indéterminations du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Autrement dit, elle permet de déterminer $\lim_{x \to c} \frac{u(x)}{v(x)}$, si lorsque x tend vers c, $u(x)$ ET $v(x)$ tendent vers 0 ou vers $\pm\infty$.

Selon cette règle, *si* la limite $\lim_{x \to c} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ *existe*, alors :

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to c} \frac{u'(x)}{v'(x)}}$$

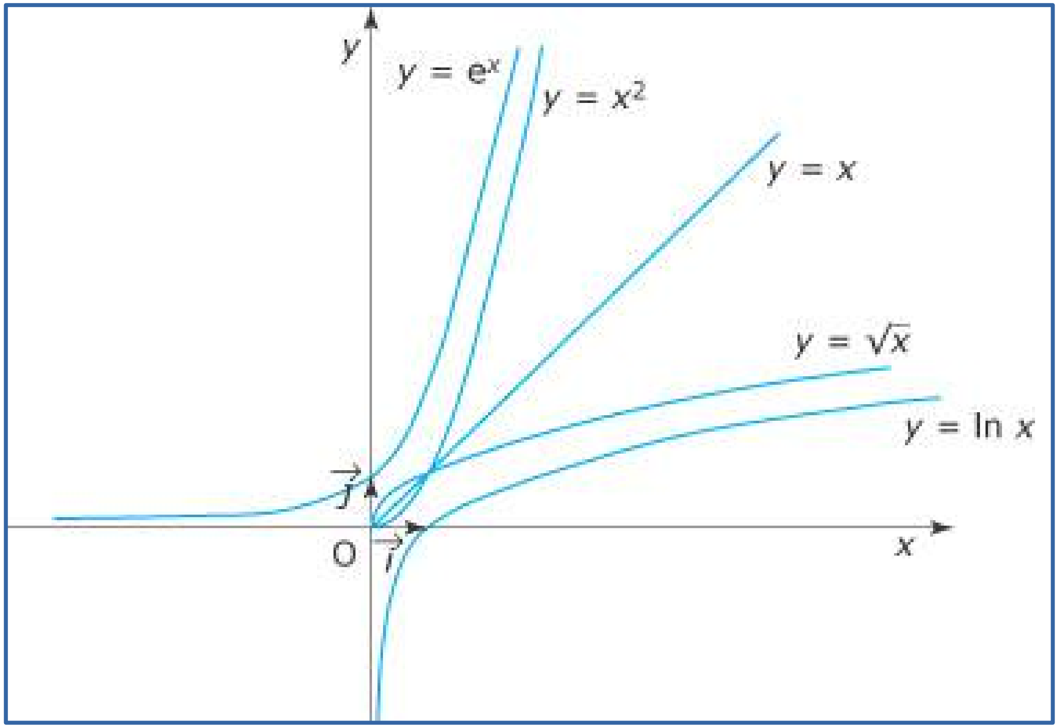
exemple $\longrightarrow$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 2$$

Croissances comparées de l'exponentielle, du logarithme et des fonctions puissances

Propriété 8
Pour tout nombre réel α strictement positif :

- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\alpha}} \right) = 0.$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{x}}{x^{\alpha}} \right) = +\infty.$



Fonctions : la dérivation

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	
Multiplication par un nombre	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	
Multiplication	$u \times v$	
Puissance	u^n	
Division	$\frac{u}{v}$	
Inverse	$\frac{1}{v}$	
exponentielle	e^u	
logarithme	$\ln(u)$	
sinus	$\sin(u)$	
cosinus	$\cos(u)$	

Fonctions : la dérivation

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un nombre	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Multiplication	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Puissance	u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
Division	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$

exponentielle	e^u	$u' \ e^u$
logarithme	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
sinus	$\sin(u)$	$u' \ \cos(u)$
cosinus	$\cos(u)$	$-u' \ \sin(u)$

Exercice : calculer la dérivée

Calcul de la dérivée des fonctions suivantes :

- ➔ $f(x) = \pi$
- ➔ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

- ➔ $f(x) = x^3$
- ➔ $f(x) = x^{2007}$

Exercice : calculer la dérivée

Calcul de la dérivée des fonctions suivantes :

→ $f(x) = \pi \qquad f'(x) = 0$

→ $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \qquad f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

→ $f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2$

→ $f(x) = x^{2007} \qquad f'(x) = 2007x^{2006}$

Dérivées successives

Définition 10
Soit f une fonction dérivable. Lorsque cela est possible, on définit les <u>dérivées successives</u> de f notées :

$$f' \quad , \quad f'' \quad , \quad f''' \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(n)}.$$

Exemple 19
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$.

- ➔ $f'(x) = 6x^2 - 2x + 1$.
- ➔ $f''(x) = 12x - 2$.
- ➔ $f'''(x) = 12$.
- ➔ $f^{(4)} = 0$.

Equation de la tangente

Propriété 9

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
La <u>tangente</u> $\mathcal{T}_a$ en a à la courbe C_f a pour équation :

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Equation de la tangente

Exemple 22

Soit $f(x) = x^2 + 2$. Les équations des tangentes en 0 et en -1 sont :

Equation de la tangente

Exemple 22

Soit $f(x) = x^2 + 2$. Les équations des tangentes en 0 et en -1 sont :

- ➔ $f'(x) = 2x$
- ➔ $f'(0) = 0$ donc $T_0 : y = 0 \times (x - 0) + f(0) = 2$.
- ➔ $f'(-1) = -2$ donc $T_{-1} : y = -2 \times (x + 1) + f(-1) = -2x + 1$.

Exercice 1 – déterminer les limites

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + 1}{(x-3)^2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - 6}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x + 5}{(x^2 - 9)}$$

$$\lim_{x \to -3} \ln(x+3)$$

$$\lim_{x \to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$$

Exercice 2 – déterminer les limites

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e - e^{\cos(x)}}{x^{2}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{7x - \sin(x)}{x^{2} + \sin(3x)}$$

Exercice 3

Etudier la fonction polynôme $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$

Etudier $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

Etude d'une fonction exponentielle $h(x) = (x + 2)\ e^{-x}$

Exercice 4 – vrai ou faux ?

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, D son ensemble de définition

a. On a D $=\,]0,+\infty[$.

b. La courbe C admet une droite asymptote en $+\infty$.

c. Pour tout $x\in$ D, on a : $f(x)<\dfrac{x}{2}$.

d. Pour tout $x\in$ D, on a : $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x(\ln x)^2}$.

Exercice 5

Exercice D : Un caillou à la mer

Un enfant monte au sommet d'un phare et laisse tomber verticalement un caillou dans la mer.
On modélise la vitesse (en mètre par seconde) du caillou au bout de t secondes par la fonction

$$f(t) = 6 \times \frac{e^{0,1t} - 1}{e^{0,1t} + 1}$$

1. Vérifier que le caillou est bien lâché sans vitesse initiale selon ce modèle.
2. a) Déterminer une expression de $f'(t)$.

   b) Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
3. La vitesse du caillou dépassera-t-elle les 10 m.s^{-1} ?

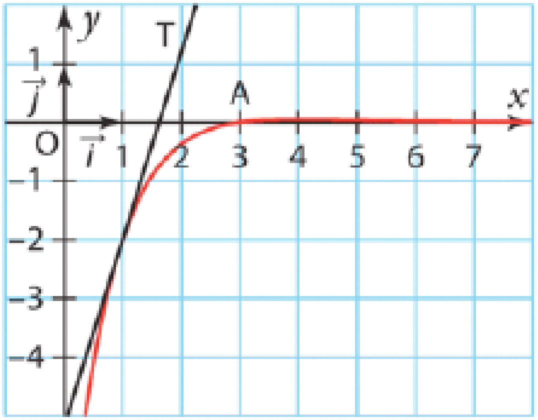
Exercice 6

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.

Sa courbe représentative C_f, tracée dans le repère ci-dessous, passe par le point $A(3; 0)$.

T est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

1. Déterminer la valeur de a et de b. *On se montrera qu'on se ramène à un système* $\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = -2e \end{cases}$
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.



QCM – domaines de définition

L'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

est :

A	1	$[0 ; +\infty[$
B		$[-2 ; +\infty[$
C		$]-\infty ; +\infty[$

L'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

est :

A	2	$]1 ; +\infty[$
B		$]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$
C		$\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

L'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

est :

A	3	$[2 ; +\infty[$
B		$[0 ; +\infty[$
C		$[-2 ; 2]$

QCM – domaines de définition

L'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

est :

A	**4**	$]-\infty ; +\infty[$
B		$[3 ; +\infty[$
C		$]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$

L'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$f(x) = \sqrt{9 - x} + \sqrt{x}$

est :

A	**5**	$]-\infty ; 9]$
B		$[0 ; 9]$
C		$[0 ; +\infty[$

QCM – domaines de définition

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+16}$$

est :

A	6	] - ∞ ; 1/2[∪]1/2 ; + ∞ [
B		$\mathbb{R}$
C		] - ∞ ;-4[∪] - 4 ; 4 [∪] 4 ; + ∞ [

L'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-5}$$

est :

A	7	$\varnothing$
B		[4 ; 5]
C		$\mathbb{R}$

L'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)^2$$

est :

A	8	] - ∞ ; 1[∪]1 ; + ∞ [
B		[0 ; + ∞ [
C		$\mathbb{R}$

QCM – domaines de définition

L'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x}$$

est :

A	9	$\mathbb{R} - \{0\}$
B		$\mathbb{R}$
C		$[0\ ;+\infty[$

L'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$$

est :

A	10	$\mathbb{R}$
B		$[0\ ;+\infty[$
C		$\mathbb{R} - \{0\}$