TD3

Ex1

1- on met le schéma sous forme d'un schéma multipas :

$$y_{n+1} - y_n = h\left\{\frac{1}{2} f_n + \frac{1}{2} f_{n+1}\right\}$$

pour étudier la stabilité on étudie les racines de $\rho(z) = z - 1$

il y a une seule racine $z = 1$ et elle est simple donc le schéma est stable.

Rq on peut aussi prendre $f \equiv 0$ et regarder
$y_{n+1} - y_n = 0$ on trouve que la suite $(y_n)_n$ est constante $= y_0$ donc elle est bornée !

2- l'erreur de consistance est :

$$\varepsilon(h) = y(t_0+h) - y(t_0) - h\left\{\frac{f(t_0,y_0) + f(t_0+h, y(t_0+h))}{2}\right\}$$

$$\varepsilon(h) = y(t_0+h) - y(t_0) - h\left\{\frac{y'(t_0) + y'(t_0+h)}{2}\right\}$$

on a utilisé $y'(t) = f(t, y(t))$.

ensuite on effectue un développement de Taylor :

$$\varepsilon(h) = \cancel{y(t_0)} + \cancel{h y'(t_0)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''(t_0)} + O(h^3)$$
$$- \cancel{y(t_0)} - \cancel{\frac{h}{2} y'(t_0)} - \frac{h}{2}\left\{\cancel{y'(t_0)} + \cancel{h y''(t_0)} + O(h^2)\right\}$$

$$\varepsilon(h) = O(h^3) \quad \boxed{\text{E}}$$

3. D'après le théorème vu en cours, un schéma stable et consistant est convergent. De plus, comme l'erreur de consistance est $O(h^3)$ le schéma est d'ordre deux

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h^2) \text{ quand } h \to 0.$$
pour $T > 0$ fixé.

EX 2

1- Suivons l'indication :

$$y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt$$

utilisons donc la quadrature de Simpson :

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq (b-a)\left\{\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right\}$$

(qui est exacte pour f polynôme de degré ≤ 3.)

$$y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) \simeq 2h\left\{\frac{1}{6}y'(t_{n-1}) + \frac{4}{6}y'(t_n) + \frac{1}{6}y'(t_{n+1})\right\}$$

$$\simeq \frac{2h}{6}\left\{f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + 4f(t_n, y(t_n)) + \frac{1}{6}f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right\}$$

D'où le schéma, avec les mêmes coefficients :

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{2h}{6}\left\{f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right\}$$

c'est un schéma implicite.

2- Pour calculer y_{n+1} on remarque que

$y_{n+1} = g(y_{n+1})$ avec la fonction g définie ainsi :

$$g : y \longmapsto y_{n-1} + \frac{2h}{6}\left\{f(t_{n-1}+2h, y) + 4f(t_{n-1}+h, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1})\right\}$$

On vérifie aisément que g est contractante : (y_{n-1}, y_n fixés)

$$g(y) - g(z) = \frac{2h}{6}\left\{ f(t_{n-1}+2h, y) - f(t_{n-1}+2h, z) \right\}$$

$$|g(y) - g(z)| \leq \frac{2h}{6} L |y-z| \quad \text{car } f(t,\cdot) \text{ est } L\text{-lipschitz}$$

$$|g(y) - g(z)| \leq \frac{hL}{3} |y-z|$$

donc pour $h < 3/L$ g est contractante.

On peut donc calculer y_{n+1} par la méthode des approximations successives, c'est à dire comme limite de la suite des itérées

$$g(y_n),\ g\circ g(y_n),\ g\circ g\circ g(y_n), \dots$$

3 - Le schéma de Milne est un schéma multipas, on étudie les racines du polynôme caractéristique.

$$\rho(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$

les racines $+1, -1$ sont simples et de module ≤ 1 donc le schéma est stable.

4 - Effectuons des développements de Taylor autour du point t_n.

$$\mathcal{E}(h) = y(t_n+h) - y(t_n-h) - \frac{2h}{6}\left\{ f(t_n+h, y(t_n+h)) + 4f(t_n, y(t_n)) + f(t_n-h, y(t_n-h)) \right\}$$

$$\mathcal{E}(h) = y(t_n+h) - y(t_n-h) - \frac{2h}{6}\left\{ y'(t_n+h) + 4y'(t_n) + y'(t_n-h) \right\}$$

on a utilisé le fait que $y'(t) = f(t, y(t))$.

$$\varepsilon(h) = \cancel{y(t_n)} + \cancel{h y'(t_n)} + \frac{h^2}{2}\cancel{y''(t_n)} + \frac{h^3}{6}\cancel{y'''(t_n)} + \cancel{\frac{h^4}{4!} y^{(IV)}} + O(h^5)$$

$$-\left(\cancel{y(t_n)} - \cancel{h y'(t_n)} + \frac{h^2}{2}\cancel{y''(t_n)} - \cancel{\frac{h^3}{6} y'''} + \cancel{\frac{h^4}{4!} y^{(IV)}} + O(h^5)\right)$$

$$-\frac{h}{3}\left(\cancel{y'(t_n)} + h\cancel{y''(t_n)} + \frac{h^2}{2}\cancel{y'''(t_n)} + \cancel{\frac{h^3}{6} y^{(IV)}}\right) + O(h^5)$$

$$-\frac{4h}{3} y'\cancel{(t_n)}$$

$$-\frac{h}{3}\left(\cancel{y'(t_n)} - h\cancel{y''(t_n)} + \cancel{\frac{h^2}{2}} y'''(t_n) - \cancel{\frac{h^3}{6} y^{(IV)}}\right) + O(h^5)$$

$$\varepsilon(h) = O(h^5)$$

5. D'après le théorème du cours, le schéma multipas est stable et consistant donc il est convergent.

Comme l'erreur de consistance est en $O(h^5)$ le schéma est d'ordre 4.

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h^4) \quad \text{quand } h \to 0$$

pour $T > 0$ fixé.