Département GEII
BUT1
Semestre 2

Module d'Outils Mathématiques et Logiciels

OML2

Intégrales et Equations Différentielles

SUPPORT DE COURS

M.C. Gillet 2021-2022

SOMMAIRE

CHAPITRE 1

INTEGRALES

I. DÉFINITION ET INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Soit une fonction f , que l'on représente sur le schéma ci-dessous.
On définit un intervalle [a, b] sur lequel on va travailler et sur lequel la fonction est définie.
On définit aussi l'écart $x_1 - x_0 = \dfrac{b-a}{n}$, qui est constant (ce sera le « pas » dans les méthodes numériques)

On note cet écart $x_1 - x_0 = \Delta x$

de même $x_2 - x_1 = \Delta x$

...

$x_n - x_{n-1} = \Delta x$

Schéma

D'autre part, on admet que la somme de Riemann de la fonction f sur l'intervalle [a, b] est notée S_n et est définie par :

$$S_n = (x_1 - x_0) f(m_0) + (x_2 - x_1) f(m_0) + ... + (x_n - x_{n-1}) f(m_{n-1})$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i)$$

Si cette somme admet une limite lorsque n tend vers l'infini, alors f est intégrable sur [a, b] et cette limite est appelée « intégrale » de f sur [a, b] . La somme S_n peut être rendue aussi proche de la limite si la suite x_0, x_1, …, x_{n-1}, x_n est choisie avec un écart suffisamment petit.

On note donc : $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$

Cette limite se lit : « somme de a à b de *f(x)dx* »

Au vu du schéma que nous venons de réaliser, nous constatons que l'expression de S_n s'écrit aussi :

$$S_n = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i)$$

soit encore : $$S_n = \underbrace{\Delta x \times f(m_0)}_{\text{aire du rectangle R1}} + \underbrace{\Delta x \times f(m_1)}_{\text{aire du rectangle R2}} + \ldots + \underbrace{\Delta x \times f(m_{n-1})}_{\text{aire du rectangle Rn}}$$

Donc S_n est égale à l'aire hachurée.

On remarque que si $\Delta x \to 0$ (on dira ensuite $\Delta x \to dx$) et que le nombre de points x_n augmente indéfiniment, la zone hachurée tend vers l'aire $\mathcal{A}$ entre la fct $f(x)$ et la droite *Ox* d'une part,

et les droites d'équations *x*=*a* et *x*=*b* d'autre part.

Par abus de langage, on parlera de « l'aire sous la courbe entre a et b ».

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}$$

NOTES

Si une fonction est négative, alors

$$\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{A}_1,$$

$\mathcal{A}_1 > 0$, représente l''aire « sous la courbe » mais le résultat de l'intégrale sera négatif.

Donc l'aire représentant l'intégrale sera affectée du signe – si la fonction *f(x)* se trouve sous l'axe *Ox* ,
De même, elle sera affectée du signe + si la fonction *f(x)* se trouve au dessus de l'axe *Ox*.

Si la fonction f prend des valeurs >0 et <0, comme ci-contre,

alors $$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

II. INTÉGRALES ET PRIMITIVES

On appelle **primitive** d'une fonction f sur I $(I \in \mathbb{R})$,
une fonction F, continue et dérivable sur I, qui admet f pour dérivée sur I.
On note : $\forall x \in I\ ,\ F'(x) = f(x)$

Les primitives sont définies à une constante près.
$F(x)$ dépend de x, $F(x) = \int f(x)dx$

ex : $F(x) = x^3$ est *une* primitive de $f(x) = 3x^2$ On a bien $F'(x) = 3x^2$
$F(x) = x^3 + 1$ est aussi une primitive de $f(x) = 3x^2$

On notera l'**intégrale** $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Ce résultat de l'intégrale est indépendant de x.

ex : $\int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$

III. PRIMITIVES USUELLES

cf tableau des dérivées.
On rappelle que les primitives sont définies à une constante près.

ex1 : $I_1 = \int (4x^2 - 5x + 1)dx$

$I_1 = \int 4x^2\ dx - \int 5x dx + \int dx$

$I_1 = \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + x + K \quad , avec\ \ K \in \mathbb{R}$

ex2 : $I_2 = \int_0^{\pi} \cos 2x dx$

$I_2 = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(sin 2\pi - \sin 0\right)$

$I_2 = 0$

IV. PROPRIÉTÉS

Soient f et g, deux fonctions définies, continues sur $[a,b]$ et λ une constante réelle.
On admettra les propriétés suivantes :

1) linéarité

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Attention : pas pour le produit de deux fonctions !
C'est aussi le cas pour les dérivées
Rappel $(uv)' = u'v + uv'$

2) Formule de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$, avec c un point de l'intervalle [a, b]

En particulier :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

En effet, d'après la définition de l'intégrale on a : $\int_a^a f(x)dx = 0$

et d'après la formule de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Donc $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) fonction paire

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 2\int_0^{+a} f(x)dx$$

4) fonction impaire

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 0$$

V. MÉTHODES D'INTÉGRATION

On ne peut pas toujours intégrer une fonction directement. On fait alors appel à différentes méthodes.

V.1 Intégration par changement de variable

Soit $I = \int f(x)dx$

En fonction de l'allure de $f(x)$, on choisit un changement de variable adapté, qui conduit à poser $t = g(x)$.
On calcule la dérivée, en utilisant la notation différentielle de la dérivée on obtient dt. Puis on remplace tout ce qui est fonction de *x* dans I par des fonctions de la nouvelle variable t. On obtient donc $I = \int \varphi(t)dt$.
Si le changement de variable est bien choisi, on calcule facilement les primitives en fonction de la variable t.
Puis on revient à la variable *x*.

ex : $I = \int (2x+1)^3 dx$

Changement de variable dans les intégrales :
On procède de la même façon, mais les bornes, correspondant à la variation de *x* doivent être recalculées, d'après le changement de variable posé.

Ainsi $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \; = \; \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt$ voir les ex de TD

Note : si on ne recalcule pas les bornes, on peut calculer la primitive en t, puis repasser à la variable x et enfin faire le calcul avec les bornes données pour la variable x.

V.2 Intégration par linéarisation

Il s'agit de rendre linéaire la fonction, donc de l'obtenir à la puissance 1.
On peut linéariser les fonctions trigonométriques avec les formules de linéarisation (ou encore de Carnot), les formules de transformation produit-somme, les formules d'Euler.

Rappels : $\cos^2 u = \dfrac{1+\cos 2u}{2}$ et $\sin^2 u = \dfrac{1-\cos 2u}{2}$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$ (etc, cf formulaire trigo)

$\cos x = \dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

ex : $\int \sin^2 x dx$

V.3 Intégration par parties

Rappel : Attention au produit de deux fonctions !

On rappelle que la dérivée d'un produit de fonction est telle que

$(uv)' = u'v + uv'$

En intégrant cette expression, on obtient :

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

soit : $u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$

Alors : $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Et en utilisant la notation différentielle : $v'(x) = \dfrac{dv}{dx}$ et $u'(x) = \dfrac{du}{dx}$

on obtient finalement:

$$\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du$$

C'est la formule de l'intégration par partie, que l'on note et retient sous la forme :

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu \qquad \textbf{ou encore} \qquad \int uv' = uv - \int u'v}$$

Si l'on a affaire à une intégrale, la formule est la même en tenant compte des bornes :

$$\boxed{\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu \qquad \textbf{ou encore} \qquad \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v}$$

<u>ex</u> : $I = \int_0^1 xe^x dx$

Cette formule s'applique lorsque l'on cherche les primitives d'un produit de 2 fonctions, si les primitives de l'une sont facilement calculables et si $\int vdu$ est plus simple à calculer que $\int udv$.

C'est le cas pour le produit :

1/ d'un polynôme par un logarithme, ou une fonction trigonométrique inverse, ou une fonction hyperbolique inverse

on pose alors $u = log(...)$ (ou fonction trigo inverse, ou fonction hyperbolique inverse) car la dérivée est connue.

2/ d'un polynôme par un sinus (ou cosinus)

alors on prend comme fonction u le polynôme

(car on diminue ainsi le degré du polynôme et la dérivée du sinus ou du cosinus ne devient pas plus complexe)

3/ d'une exponentielle par un sinus (ou cosinus)

on pose alors indifférement u et dv, car il n'y a pas de difficultés particulières.

<u>Moyen mnémo.</u> : ALPES

<u>Remarque 1</u> : Pour trouver les primitives, il faut parfois répéter plusieurs fois la méthode.

<u>Remarque 2</u> : La constante d'intégration n'intervient qu'à la fin du calcul

V.4 <u>Intégration numérique</u>

Il existe aussi des méthodes numériques (méthodes des rectangles, des trapèzes et de Simpson), basées sur l'interprétation géométrique des intégrales.

VI. APPLICATION AUX CALCULS DE VALEURS MOYENNE ET EFFICACE

La valeur moyenne de la fonction $f(t)$ entre les valeurs $t = a$ et $t = b$ est :

$$f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

La valeur efficace de la fonction $f(t)$ entre les valeurs $t = a$ et $t = b$ est :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt$$

d'où $$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$$

Lorsque la fonction est T- périodique, on intègre sur une période.
Les formules sont alors :

$$f_{moy} = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt \quad \text{et} \quad f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f^2(t)dt$$

d'où $$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f^2(t)dt}$$

ex: Signal carré de rapport cyclique 1/2

CHAPITRE 2

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

I. <u>DEFINITION</u>

On appelle équation différentielle du premier ordre, une relation de la forme :

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

avec x une variable
y(x) une fonction de x
y'(x) sa dérivée première

Intégrer l'équation différentielle (ou la résoudre), c'est chercher les fonctions y(x) solutions de l'équation.

<u>ex</u> : $y'(x) - x = 0$

a) Les courbes représentatives des solutions y(x) sont appelées <u>courbes intégrales</u> de l'équation différentielle.

b) L'ensemble des fonctions y, solutions de l'équation différentielle, est l'intégrale générale ou <u>la solution générale</u>. On démontre que la solution générale d'une équation différentielle du premier ordre <u>dépend d'une constante arbitraire</u>.

c) Une <u>solution particulière</u> est une solution complètement déterminée. On détermine la valeur de la constante avec la donnée d'une condition supplémentaire (généralement la condition initiale).

<u>ex</u>: $y'(x) = \frac{1}{2}x^2$ avec y(0)=1

II . EQUATIONS LINEAIRES DU PREMIER ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme :

$$A(x)y'(x)+B(x)y(x)=f(x)$$

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants une équation de la forme :

$ay'(x)+by(x)=f(x)$ où a et b sont des constantes réelles.

On ne travaillera que sur ce type d'équation différentielle.
Si l'équation n'est pas présentée comme ci-dessus, il convient de la ré-écrire dans cet ordre (dérivée, fonction, second membre).

L'intégration (ou la résolution) d'une telle équation se fait en trois étapes, décrites ci-après.

II.1 1ère étape : Intégration de l'équation sans second membre (ESSM)

$$ay'(x)+by(x)=0$$

C'est une équation à variables séparables.

$$a\frac{dy}{dx}=-by$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}y$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{b}{a}dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int-\frac{b}{a}dx$$

$$\ln|y|=-\frac{b}{a}x+C$$

$$|y|=e^{-\frac{b}{a}x+C}=\lambda e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$y=Ke^{-\frac{b}{a}x}$$

C, λ et K constantes réelles

Autre façon de procéder avec $ay'(x)+by(x)=0$
On établit l'équation caractéristique qui est de la forme :

$$ar+b=0 \qquad \text{soit } r=-\frac{b}{a}$$

On admet que la solution de l'ESSM s'ecrit :

$$y(x)=ke^{rx} \qquad \text{soit encore } y(x)=ke^{-\frac{b}{a}x}$$

ex : $y'(x) - 4y = 0$

II.2 2ème étape : Equation avec second membre (EASM)

Dans cette étape, on recherche une solution particulière notée $y_p(x)$. Il arrive que cette solution soit évidente, mais on verra dans les exemples comment l'établir en pratique, selon différents cas.
Alors on pose $y_p(x)$, puis on cherche sa dérivée $y'_p(x)$ et on reporte ces résultats dans l'EASM pour trouver la valeur de la constante.

ex : $y'(x) - 4y = 2$

II.3 3ème étape : Solution Générale (SG)

La solution générale est la somme :

- de la solution générale de l'ESSM
- et d'une solution particulière (EASM).

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

Enfin, les conditions initiales permettent de calculer les constantes.

ex 2 : $y'(x)-4y=2$, avec pour conditions initiales y(0)=0

III. APPLICATION A L'ELECTRONIQUE

Charge d'un condensateur à travers une résistance.
Etablir la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur lorsque la tension appliquée au circuit est

a) E(t) = E = cte
b) E(t) = $E\sin\omega t$

CHAPITRE 3

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU SECOND ORDRE

I. DEFINITION

On appelle équation différentielle du second ordre, une relation de la forme :

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

avec x une variable
y(x) une fonction de x
y'(x) sa dérivée première
y"(x) sa dérivée seconde

ex : $y''(x) = x$

a) Les courbes représentatives des solutions y(x) sont appelées courbes intégrales de l'équation différentielle.

b) La solution générale d'une équation différentielle du second ordre dépend de 2 constantes arbitraires.

c) Une solution particulière est déterminée par la donnée de conditions initiales. ($y(x_0)=a$ et $y'(x_0)=b$)

ex : $y''(x) = x$

Certaines éq diff du 2nd ordre peuvent se ramener à une éq diff du 1er ordre (on ne les traitera pas ici).

II. EQUATIONS LINEAIRES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation de la forme :

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

La solution générale est la somme :
- de la solution générale de l'ESSM (méthode donnée en II.1)
- d'une solution particulière (méthode donnée en II.2).

Les conditions initiales permettent de calculer les constantes.

On traitera le cas des équations à coefficients constants :

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$ avec a et b réels.

soit encore $$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x)$$

II.1 Intégration de l'équation sans second membre (ESSM)

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

On établit l'équation caractéristique qui est de la forme :

$$r^2 + ar + b = 0$$

Puis on la résout.
Selon le signe du discriminant, la solution générale y_0 de l'ESSM a différentes formes, comme suit :

SIGNE Δ	RACINES de $r^2 + ar + b = 0$	SOL. GENERALE y_0 DE L'ESSM
$\Delta > 0$	2 racines réelles $r_1 \neq r_2$	$y_0 = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$
$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + j\beta$ $r_2 = \alpha - j\beta$	$y_0 = e^{\alpha x}(k_1 \cos\beta x + k_2 \sin\beta x)$
$\Delta = 0$	1 racine double r	$y_0 = e^{rx}(k_1 x + k_2)$

Avec k_1 et k_2 des constantes.

<u>Ex 1</u> : $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$

<u>Ex 2</u> : $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$

<u>Ex 3</u> : $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$

II.2 Equation avec second membre (EASM)

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

On se restreint à quelques cas, les plus fréquents, où f(x) est telle qu'il est possible de trouver une solution particulière simplement.

a) <u>f(x) est un polynôme de degré n</u>

alors si $b \neq 0$, on prend $y_p(x)$ = polynôme de degré n
si $b = 0$ et $a \neq 0$, on prend $y_p(x)$ = polynôme de degré n+1
(car en fait on a le degré n pour la dérivée première)
si $b = 0$ et $a = 0$, on prend $y_p(x)$ = polynôme de degré n+2
(évident, et pas d'intérêt car on intègre directement 2 fois, *cf ex I.c) y''=x*)

<u>Ex 4</u> : $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 3x^2 + 1$

b) $\underline{f(x) = Ke^{mx}}$

alors si m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on prend $y_p(x) = Ce^{mx}$
si m est racine simple, on prend $y_p(x) = Cxe^{mx}$
si m est racine double, on prend $y_p(x) = Cx^2e^{mx}$

<u>Ex 5</u> : $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 8e^{-x}$

c) $f(x) = Ce^{mx}P(x)$

P(x) étant un polynôme de degré p.
On posera $y_p(x) = g(x)e^{mx}$,
avec g(x) un polynôme de degré d, tel que :
si m n'est pas racine de l'équation caractéristique, d = p
si m est racine simple, d = p+1
si m est racine double, d = p+2

ex 6 : $y''(x) - y(x) = 2xe^{x}$

d) f(x) est sinusoïdal (ou cosinusoïdal)

on posera $y_p(x)$ sinus et cosinus de même pulsation.

ex 7 : $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \sin x$

III. CONCLUSION

Les différents types d'équations différentielles étudiées ici sont assez peu nombreux, mais correspondent aux cas classiques que l'on sait intégrer.

Certains phénomènes physiques conduisent à des équations différentielles d'un type non classique. On fait alors appel à des techniques de calcul numérique (méthode d'Euler...).