Théorie du consommateur

Edmond Baranes

Microéconomie

Plan du cours

Chapitre1: La théorie du consommateur (compléments)

Chapitre 2 : Optimum et équilibre général

Chapitre 3 : Externalités et biens publics

Chapitre 4 : Microéconomie de l'incertain

Chapitre 5 : Concurrence imparfaite

Quelques références

Varian H., *Analyse microéconomique*, De Boeck, 2008

Varian H., *Introduction à la micréconomie*, de Boeck, 2006

Mas Colell, Whinston et Green, *Microeconomic theory*, 1995

1. Rappels sur l'équilibre du consommateur
2. La dualité
3. Equations de SLUTSKY
4. Les variations de Bien-Etre

1. Rappels sur l'équilibre du consommateur : La fonction d'utilité

Fonction d'utilité : $u(x) = (x_1, x_2, ...x_i..x_n)$

Taux Marginal de Substitution : $\dfrac{dx_j}{dx_j} = -\dfrac{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}}$

Transformation monotone (croissante) de u (avec $(v(u))$ alors le TMS est inchangé :

$$\frac{dx_j}{dx_j} = -\frac{v'(u)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}}{v'(u)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}} = -\frac{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}}$$

Vecteur de consommation : $x = (x_1, x_2 ... x_i ... x_n)$
Vecteur de prix : $p = (p_1, p_2, ... p_i ... p_n)$
Ensemble budgétaire : $B = \{x \in X, \ px \leq R\}$, où R est le revenu du consommateur

Le programme de maximisation :

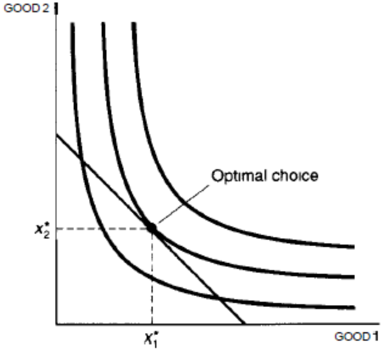
$$\begin{aligned} &\max \ u(x) \\ &\quad s.c. \ px \leq R \\ &\quad x \in X \end{aligned}$$

Le Lagrangien :

$$\max_{x,\lambda} L = u(x) - \lambda(px - R)$$

Les demandes marshaliennes : $x_i^* = x_i(p, R)$ avec $x^* = x(p, R)$

Le cas 2 biens



$$\frac{\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j} \quad \text{pour} \quad i, j = 1, ..., n$$

La fonction d'utilité indirecte

$v(p, R) = u(x(p, R))$

Les propriétés de la fonction d'utilité indirecte :

1. $v(p, R)$ est non croissante par rapport à p et non décroissante par rapport à R
si $p' \geq p$ alors $v(p', R) \leq v(p, R)$

2. $v(p, R)$ est homogène de degré 0 par rapport à (p, R)
si $\forall t > 0$ on a $v(tp, tR) = t^0 v(p, R) = v(p, R)$

3. $v(p, R)$ est quasi-convexe par rapport à p
4. $v(p, R)$ est continue $\forall p >> 0$ et $R > 0$

Rq : on peut inverser $v(p, R)$ par rapport à R et donc exprimer R en fonction du niveau d'utilité $==>$ fonction de dépense $e(p, u)$

La fonction de dépense

Coût minimum pour atteindre un niveau d'utilité u :

$$\begin{aligned} e(p, u) = \min \ & px \\ \text{tel que} \ & u(x) \geq u \end{aligned}$$

Les demandes hicksiennes (ou demandes compensées) :

$$h_i^* = h_i(p, u) \quad \text{et} \quad h^* = h(p, u) = (h_1^*, ..., h_n^*)$$

Les propriétés de la fonction de dépense :

1. $e(p, u)$ est non décroissante par rapport à p

2. $e(p, u)$ est homogène de degré 1 par rapport à p

3. $e(p, u)$ est concave par rapport à p

4. $e(p, u)$ est continue par rapport à p, $\forall p >> 0$

5. $h(p, u)$ est tel que $h_i(p, u) = \dfrac{\partial e(p, u)}{\partial p_i}$ pour $i = 1...n$

Conséquence :

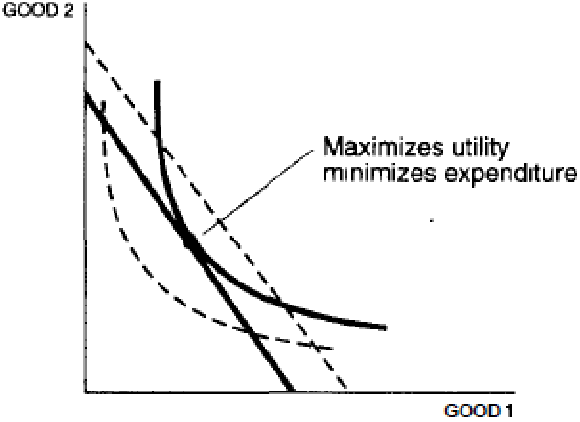
La matrice des termes (de substitution) $(\partial h_i(p,u)/\partial p_j) = \dfrac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i \partial p_j}$ est symétrique, semi-définie négative

$==>$ Les demandes hicksiennes sont décroissantes par rapport au prix :

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i^2} \leq 0$$

(effet-prix direct compensé non positif)

Le cas 2 biens



Les identités importantes

Entre fonction de dépense, fonction d'utilité indirecte, demandes marchaliennes et demandes hicksiennes

Maximisation de l'utilité : $\begin{cases} v(p, R^*) = \max \ u(x) \\ \quad \text{s.c.} \quad px \leq R^* \end{cases}$

Minimisation de la dépense : $\begin{cases} e(p, u^*) = \min \ px \\ \quad \text{s.c.} \quad u(x) \geq u^* \end{cases}$

Les 4 identités

1. $e(p, v(p, R)) \equiv R$: la dépense minimum nécessaire pour atteindre l'utilité $v(p, R)$ est R

2. $v(p, e(p, u)) \equiv u$

3. $x_i(p, R) \equiv h_i(p, v(p, R))$: la demande marshalienne pour le revenu R est égale à la demande hicksienne pour l'utilité $v(p, R)$

4. $h_i(p, u) \equiv x_i(p, e(p, u))$

L'identité de ROY

Soit $x(p, R)$ la fonction de demande marshalienne alors,

$$x_i(p, R) = -\frac{\dfrac{\partial v(p, R)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(p, R)}{\partial R}} \quad \forall i = 1, ..., n \text{ et } \frac{\partial v(p, R)}{\partial R} \neq 0$$

Preuve :

Supposons que $x(p,R) \equiv h(p,u)$

D'après l'Identité 2 on a : $u \equiv v(p, e(p,u))$

En dérivant par rapport à p_i on a :

$$\frac{\partial v(p,R)}{\partial p_i} + \frac{\partial v(p,R)}{\partial R}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = 0$$

qui se réécrit : $\dfrac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = -\dfrac{\partial v(p,R)/\partial p_i}{\partial v(p,R)/\partial R} = h_i(p,u) \equiv x_i(p,R)$

Exemple d'application : Cobb-Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \qquad ==> \qquad u(x_1, x_2) = \alpha.Ln(x_1) + (1-\alpha).Ln(x_2)$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - R)$$

Conditions de premier ordre (cso vérifiées) :

$$\frac{\alpha}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\alpha}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$

d'où $\dfrac{\alpha}{p_1 x_1} = \dfrac{1-\alpha}{p_2 x_2}$ et avec $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$

Exemple d'application : Cobb-Douglas

on a :

$$x_1^* = x_1(p, R) = \frac{\alpha R}{p_1} \quad \text{et} \quad x_2^* = x_2(p, R) = \frac{(1-\alpha)R}{p_2}$$

$$v(p, R) = Ln(R) - \alpha Ln(p_1) - (1-\alpha)Ln(p_2)$$

$$==> \quad V(p, R) = R/(p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}) \equiv u$$

En inversant la fonction d'utilité indirecte on obtient :

$$R/(p_1^{\alpha}.p_2^{1-\alpha}) = u \;\Leftrightarrow\; R = u.p_1^{\alpha}.p_2^{1-\alpha} \;\Leftrightarrow\; e(p,u) = u.p_1^{\alpha}.p_2^{1-\alpha}$$

d'où les demandes hicksiennes :

$$h_1^* = h_1(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_1} = u.\alpha.p_1^{\alpha-1}.p_2^{1-\alpha} = u.\alpha.\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha}$$

$$h_2^* = h_2(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_2} = u.(1-\alpha).p_1^{\alpha}.p_2^{-\alpha} = u.(1-\alpha).\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}$$

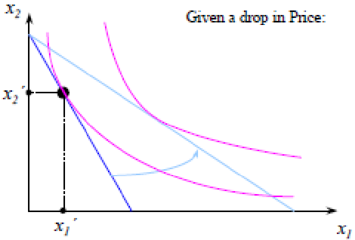
3. Equations de SLUTSKY

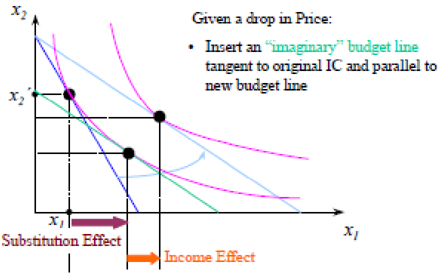
Statique comparative du comportement du consommateur

=> modification de la demande lorsque les prix et le revenu varient ?

Rappels : Effet d'une variation des prix :

=> Décomposition de Hicks (ES - ER) : ES à utilité constante





Comportement du consommateur au voisinage de l'équilibre

Vecteur des demandes marshaliennes : $x^* = x(p, R)$

Différentielle totale (par rapport à p et R) de $x^* = x(p, R)$:

$$dx^* = \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\partial x}{\partial R} dR$$

avec $R = px$ d'où : $dR = p' dx + x' dp$

En substituant :

$$\begin{aligned} dx^* &= \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\partial x}{\partial R}(p' dx + x' dp) \\ &= \left[\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial R} x'\right] dp + \frac{\partial x}{\partial R} p' dx = S.dp + \frac{\partial x}{\partial R} p' dx \end{aligned}$$

où S matrice de Slutsky, $\frac{\partial x}{\partial R}$ vecteur des ER et $p' dx$ var. revenu réel

Si var. du revenu réel nulle ($p' dx = 0$) : $dx^* = S.dp \quad \Rightarrow \quad S = \left.\frac{dx}{dp}\right|_{p' dx = 0}$

Le cas 2 biens

Le système des équations de Slutsky est :

$$\begin{bmatrix} dx_1^* \\ dx_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial R} x_1 & \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + \frac{\partial x_1}{\partial R} x_2 \\ \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2}{\partial R} x_1 & \frac{\partial x_2}{\partial p_2} + \frac{\partial x_1}{\partial R} x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dp_2 \end{bmatrix}$$

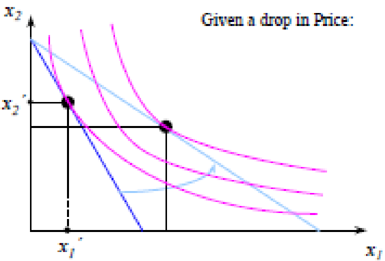
Equation de Slutsky pour le bien 2 et une variation de p_1 :

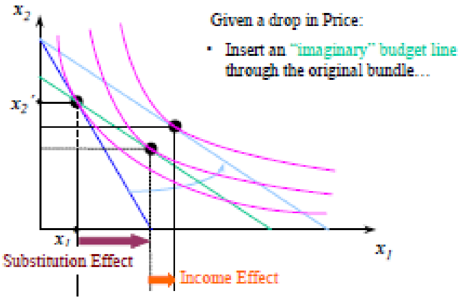
$$\left.\frac{dx_2^*}{dp_1}\right|_{p' dx = 0} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2}{\partial R} . x_1(p, R)$$

qui se réécrit :

$$\frac{\partial x_2(p, R)}{\partial p_1} = \underbrace{\frac{\partial h_2(p, v(p, R))}{\partial p_1}}_{\text{ES } (<0)} \underbrace{- \frac{\partial x_2(p, R)}{\partial R} . x_1(p, R)}_{\text{ER } (>0 \text{ si } x_2 \text{ est un bien normal})}$$

Illustration graphique





Exemple Cobb-Douglas : variation du prix bien 1

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \quad \text{on a :} \quad \begin{cases} v(p, R) = R.p_1^{-\alpha}.p_2^{\alpha-1}) \\ e(p, u) = u.p_1^{\alpha}.p_2^{1-\alpha} \\ x_1(p, R) = \dfrac{\alpha R}{p_1} \\ h_1(p, u) = u.\alpha.p_2^{1-\alpha}.p_1^{a-1} \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_1(p, R)}{\partial p_1} = -\frac{\alpha R}{p_1^2}$$

$$\frac{\partial h_1(p, v(p, R))}{\partial p_1} = \alpha(\alpha - 1)p_1^{\alpha-2}p_2^{1-\alpha}.(R.p_1^{-\alpha}.p_2^{\alpha-1}) = \alpha(\alpha - 1)p_1^{-2}.R$$

$$\frac{\partial x_1(p, R)}{\partial R}.x_1(p, R) = \frac{\alpha}{p_1}\frac{\alpha R}{p_1}$$

$$\frac{\partial h_1(p, v(p, R))}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1(p, R)}{\partial R}.x_1(p, R) = -\frac{\alpha R}{p_1^2} = \frac{\partial x_1(p, R)}{\partial p_1} \blacksquare$$

Introduction des dotations

Vecteur des dotations : $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ avec $p.\omega \equiv R$

Demandes marshaliennes : $x^* = x(p, p\omega)$

==> les prix produisent 2 effets

Demande nette en bien i : $x_i^* - \omega_i \gtrless 0$

Différentiation de $x_i^* = x_i(p, p\omega)$:

$$\frac{dx_i(p, p\omega)}{dp_j} = \left.\frac{\partial x_i(p, p\omega)}{\partial p_j}\right|_{p\omega = cst} + \frac{\partial x_i(p, p\omega)}{\partial R}.\omega_j$$

Or, :

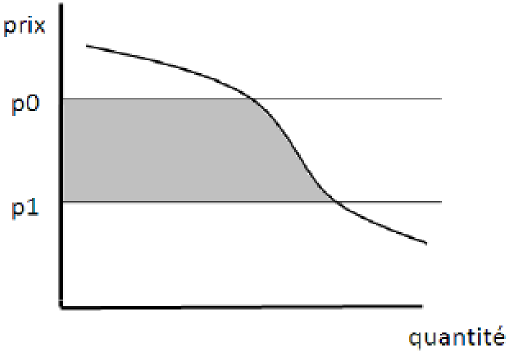
$$\left.\frac{\partial x_i(p, p\omega)}{\partial p_j}\right|_{p\omega=cst} = \frac{\partial h_i^*}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^*}{\partial R}.x_j(p, R) \quad \text{(Equation de Slutsky)}$$

On obtient :

$$\frac{dx_i(p, p\omega)}{dp_j} = \frac{\partial h_i^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, p\omega)}{\partial R}.(\omega_j - x_j^*)$$

Rappel : Le Surplus du consommateur

$$SC = \int_{p^0}^{p^1} x(p)dp \quad \text{avec} \quad p^0 > p^1$$



Rappel :

Identité de Roy : $x(p,R) = -\dfrac{\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial R}}$

avec $\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial R} = \lambda$ (Um du revenu)

d'où : $x(p,R) = -\dfrac{1}{\lambda}.\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_i}$ et en insérant dans SC :

$$\begin{aligned} SC &= -\frac{1}{\lambda}\int_{p^0}^{p^1} \frac{\partial v(p,R)}{\partial p_i} dp \\ &= -\frac{1}{\lambda}\left[v(p,R)\right]_{p^0}^{p^1} = -\frac{1}{\lambda}\left[v(p^1,R) - v(p^0,R)\right] \end{aligned}$$

Equivalent monétaire de la fonction d'utilité

La fonction d'utilité en équivalent monétaire :

$$R(p,x) \equiv e(p,u(x)) \quad = \min p.z \quad \text{s.c. } u(z) \geq u(x)$$

Pour p donné, $R(p,x)$ est une transformation croissante de la fonction d'utilité

La fonction d'utilité indirecte en équivalent monétaire :

$$\mu(p;q,R) \equiv e(p;v(q,R)) \quad = \min p.z \quad \text{s.c. } u(z) \geq v(q,R)$$

où $\mu(p;q,R)$ est la somme qu'il serait nécessaire au prix p pour avoir le même niveau de satisfaction qu'avec le prix q et le revenu R

Application Cobb-Douglas : cas 2 biens

Fonction de dépense : $e(p_1, p_2, u) = p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}.u$
d'où :

$$
\begin{aligned}
R(p, x) &= p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}.u(x_1, x_2) \\
&= p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}.x_1^{\alpha}, x_2^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

Fonction d'utilité indirecte : $v(p_1, p_2, R) = \dfrac{R}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}}$
d'où :

$$
\begin{aligned}
\mu(p; q, R) &= p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}.v(q_1, q_2, R) \\
&= p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}.q_1^{-\alpha}, q_2^{\alpha-1}.R
\end{aligned}
$$

Variation Equivalente et Variation Compensatoire

On considère 2 budgets : (p^0, R^0) et (p^1, R^1)

On pose : $u^0 v(p^0, R^0)$ et $u^1 v(p^1, R^1)$

Objectif : mesurer en équivalent monétaire la perte/le gain en utilité

Variation Equivalente :

$$
\begin{aligned}
VE &= \mu(p^0; p^1, R^1) - \mu(p^0; p^0, R^0) \\
&= e(p^0; u^1) - e(p^0; u^0) \\
&= e(p^0; u^1) - R^0
\end{aligned}
$$

Interprétation : si on donne au consommateur le revenu $R + VE$ (au lieu de R), les prix étant p^0, il obtient l'utilité $v(p^1, R^1)$

Variation Equivalente et Variation Compensatoire

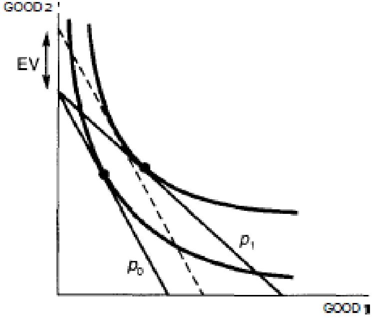
Variation Compensatoire :

$$\begin{aligned} VC &= \mu(p^1; p^1, R^1) - \mu(p^1; p^0, R^0) \\ &= e(p^1; u^1) - e(p^1; u^0) \\ &= R^1 - e(p^1; u^0) \end{aligned}$$

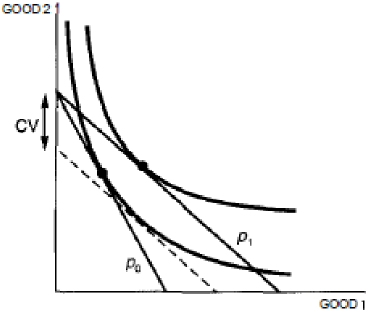
Interprétation : si on donne au consommateur le revenu $R^1 - VC$ (au lieu de R^1), les prix étant p^1, il obtient l'utilité $v(p^0, R^0)$

Illustration graphique

Cas baisse du prix du bien 1



Variation Equivalente



Variation Compensatoire

Variation Compensatoire, Variation Equivalente et Surplus du consommateur (1)

On suppose que seul le prix du bien 1 varie de p^0à p^1 et que le revenu reste constant $R = R^0 = R^1$

On a alors :

$$\begin{aligned} VE &= e(p^0; u^1) - \underbrace{e(p^0; u^0)}_{R^0 = R} \\ &= e(p^0; u^1) - \underbrace{e(p^1; u^1)}_{R^1 = R} \\ &= \int_{p^1}^{p^0} h(p, u^1) dp \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} VC &= \underbrace{e(p^1; u^1)}_{R^1 = R} - e(p^1; u^0) \\ &= \underbrace{e(p^0; u^0)}_{R^0 = R} - e(p^1; u^0) \\ &= \int_{p^1}^{p^0} h(p, u^0) dp \end{aligned}$$

Ici : $p^0 > p^1 \;\; \Rightarrow \;\; u^0 < u^1$

$$VE = \int_{p^1}^{p^0} h(p, u^1) dp \quad > \quad VC = \int_{p^1}^{p^0} h(p, u^0) dp$$

Variation Compensatoir, Variation Equivalente et Surplus du consommateur (2)

L'équation de Slutsky donne :

$$\frac{\partial h(p,u)}{\partial p} = \frac{\partial x(p,R)}{\partial p} + \frac{\partial x(p,R)}{\partial R}.x(p,R)$$

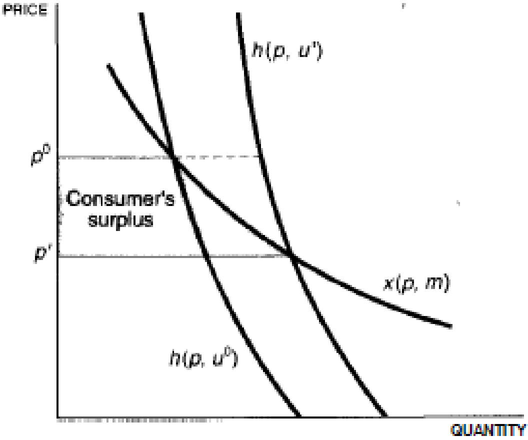
Dans le cas d'un bien normal ($\partial x(p,R)/\partial R > 0$), on a donc :

$$\frac{\partial h(p,u)}{\partial p} > \frac{\partial x(p,R)}{\partial p}$$

avec :

$$h(p,u^0) < h(p,u^1)$$

Variation Compensatoire, Variation Equivalente et Surplus du consommateur (3)



A savoir....

- Programme du consommateur et demandes marshaliennes
- Programme dual et les identités importantes (dont identité de Roy)
- Equations de Slutsky
- Variations de Bien-Etre : VA, VC et SC